Las leyes del caos

Ilya Prigogine

Las leyes del caos

Crítica

Las leyes del caos

Ilya Prigogine

Crítica

ILYA Prigogine (Moscú, 1917) fue Premio Nobel de Química en 1977 y en la actualidad es profesor de la Universidad Libre de Bruselas. Entre sus obras destacan *¿Tan sólo una ilusión?* (1983), *El nacimiento del tiempo* (1991) y, en colaboración con Isabelle Stengers, *La nueva alianza: metamorfosis de la ciencia* (1994) y *Entre el tiempo y la eternidad* (1994[2]).

Las leyes del caos

Ilya Prigogine

Traducción castellana de
Juan Vivanco

Revisión de
Javier García Sanz

Crítica
Grijalbo Mondadori
Barcelona

Este texto se editó por primera vez en italiano con el título *Le leggi del caos* (Laterza, 1993); esta traducción castellana ha sido realizada a partir del texto original en francés.

Este libro es fruto de la cooperación entre editorial Laterza y la Fundación Sigma Tau en la colección «Lezioni Italiane».

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del *copyright*, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Título original:
LES LOIS DU CHAOS

Diseño de la colección y cubierta: ENRIC SATUÉ
© 1993: Gius. Laterza & Figli Spa, Roma-Bari
© 1997 de la traducción castellana para España y América:
CRÍTICA (Grijalbo Mondadori, S.A.), Aragó, 385, 08013 Barcelona
ISBN: 84-7423-726-2
Depósito legal: B. 39-1997
Impreso en España
1997.—HUROPE, S.A., Recared, 2, 08005 Barcelona

Prólogo

En las conclusiones de su obra El carácter de la ley física,[1] *Richard Feynman se pregunta: ¿cuál será el futuro de la ciencia? ¿Seguiremos descubriendo indefinidamente nuevas leyes? Él no lo cree así. Incluso podría llegar a ser aburrido, y Feynman concluye que llegaremos a un punto en el que todas las leyes, por lo menos las que determinan lo esencial de los fenómenos, serán conocidas. No se descubre América dos veces.*

Encontramos esta visión de un «fin de la ciencia» en muchas otras obras, escritas por eminentes físicos. En su libro Historia del tiempo[2] *Hawking predice el advenimiento de una teoría unificada que nos permitirá descifrar el pensamiento de Dios.*

La tesis expuesta en estas páginas tiene una perspectiva distinta. La noción de ley de la naturaleza, tal como la formulan Feynman o Hawking, se refiere a un universo fundamentalmente reversible, en el que no hay diferencia entre pasado y futuro.

Desde Galileo hasta Feynman y Hawking, la física ha

venido repitiendo la más paradójica de las negaciones, la de la flecha del tiempo, que sin embargo refleja la solidaridad de nuestra experiencia interior con el mundo en que vivimos.

Las ciencias del devenir, la física del no equilibrio, han sido relegadas a la fenomenología, reducidas a esfuerzos casi parásitos que el hombre introduce en las leyes fundamentales. Por fin empezamos a vislumbrar la posibilidad de superar esta paradoja. Su solución pasa por una generalización del concepto de las leyes de la naturaleza. Durante las últimas décadas se ha abierto camino un concepto nuevo: la noción de inestabilidad dinámica asociada a la de «caos». La palabra caos hace pensar en desorden, imposibilidad de previsión. Pero no es así. Al contrario, como veremos en estas páginas, se puede incluir el «caos» en las leyes de la naturaleza, pero a costa de generalizar esta noción, incorporándole las de probabilidad e irreversibilidad.

En una palabra, la noción de inestabilidad nos obliga a cambiar la descripción de situaciones individuales (trayectorias, funciones de onda) por descripciones estadísticas. A escala estadística podemos poner en evidencia la aparición de una simetría temporal rota.

Como ya he mencionado, la formulación tradicional de las leyes de la naturaleza oponía las leyes fundamentales intemporales a las descripciones fenomenológicas, que incluyen la flecha del tiempo. La consideración del «caos» lleva así a una nueva coherencia, a una ciencia que no sólo habla de leyes, sino también de sucesos, que no está con-

denada a negar la emergencia de lo nuevo, y por consiguien-te de su propia actividad creadora.

Hoy conocemos varias clases de sistemas inestables, desde transformaciones geométricas (mapas) que operan en tiempos discretos hasta sistemas dinámicos o cuánticos en los que el tiempo actúa de forma continua. Es verdaderamente notable que la descripción fundamental aceptada hoy en física, como veremos, se hace en términos de sistemas inestables.

En el marco de esta obra no se puede hacer una exposición sistemática de los problemas de inestabilidad y su vínculo con la irreversibilidad. Mi intención es hacer una introducción al tema tratado con más amplitud en mi obra Time, Chaos and the Quantum.

Una teoría física nueva encuentra su expresión en una formulación matemática original. También es así en este caso, lo cual crea ciertas dificultades de exposición, porque desearía que estas páginas fueran accesibles a un público más amplio que los físicos teóricos. Pero el tema exige un mínimo de rigor. Se trata de un cambio de perspectiva que debe ser justificado y analizado.

En este texto sólo se abordan ejemplos sencillos (esencialmente «mapas»), y me limito a hacer observaciones cualitativas sobre los sistemas dinámicos propiamente dichos (clásicos o cuánticos). También evito, en la medida de lo posible, el empleo del aparato matemático. En el Apéndice, escrito en colaboración con I. Antoniou, a quien agradezco efusivamente su colaboración, se hace una exposición más sistemática del formalismo matemático.

Dado que esta obra tiene su origen en unas conferencias informales, no he querido recargarla con referencias bibliográficas, que de todos modos se recogen al final.

Para terminar este prólogo, quiero expresar mi gratitud a los organizadores de dichas conferencias, y en especial a Lorena Preta y al profesor Giulio Giorello, en cuya cátedra de Filosofía de la Ciencia tuve la posibilidad y el placer de hablar en público. Conservo un agradable recuerdo del ambiente de interés y amistad que me rodeó en Milán.

También doy las gracias a mis colegas I. Antoniou, P. Nardone y S. Tasaki, por la ayuda prestada en la redacción de las conferencias.

I. P.

Un título como *Las leyes del caos* puede parecer paradójico. ¿Hay leyes del caos? ¿Acaso no es el caos, por definición, «imprevisible»? Veremos que no es así, sino que la noción de caos nos obliga a reconsiderar la noción de «leyes de la naturaleza». En la perspectiva clásica, una ley de la naturaleza estaba asociada a una descripción determinista y reversible en el tiempo. Futuro y pasado desempeñaban en ella el mismo papel. La introducción del caos nos obliga a generalizar la noción de ley de la naturaleza y a introducir en ella los conceptos de probabilidad e irreversibilidad. Es un cambio radical, ya que desde esta perspectiva el caos nos obliga a considerar de nuevo nuestra descripción fundamental de la naturaleza. En estas páginas no se puede hacer una exposición sistemática de la teoría del caos, que por otra parte se puede encontrar en obras especializadas, pero lo que me gustaría resaltar aquí es el papel fundamental del caos en todos los niveles de descripción de la naturaleza, ya se trate del nivel microscópico, macroscópico o cosmológico.

Hoy día se habla de caos a propósito de fenómenos muy distintos. Por ejemplo, se asocia el caos a la turbulencia

en los fluidos. Pero no son estos los aspectos que nos interesan aquí. Ante todo, vamos a abordar el caos tal como resulta de las ecuaciones dinámicas clásicas o cuánticas, que en el estado de nuestros conocimientos corresponden a la descripción microscópica fundamental. Ciertamente, de este caos microscópico puede resultar el caos macroscópico, pero ya hablaremos de ello. Ahora centraremos nuestra atención en la descripción «fundamental» del comportamiento de la materia.

El caos siempre es consecuencia de inestabilidades. El péndulo sin fricción es un sistema estable, pero curiosamente la mayoría de los sistemas de interés físico, tanto en el ámbito de la mecánica clásica como de la mecánica cuántica, son sistemas inestables. En estos sistemas una pequeña perturbación se amplifica, unas trayectorias inicial-mente cercanas se separan. La inestabilidad introduce as-pectos nuevos esenciales.

Lo que nos interesa, sobre todo, es conocer la incidencia de la inestabilidad en conceptos fundamentales como el determinismo, la irreversibilidad y los propios fundamentos de la mecánica cuántica. Como veremos, aparece un nuevo enfoque para abordar todos estos problemas. Por eso, cuando se tiene en cuenta el caos, se puede hablar de una nueva formulación de las leyes de la naturaleza. La apuesta es fuerte.

El papel que tiene actualmente la ciencia en nuestra civilización es fundamental, y sin embargo, utilizando una expresión bien conocida introducida por Snow, vivimos aún en una sociedad de dos culturas. La comunicación entre

los miembros de estas dos culturas es difícil. ¿Cuál es la razón de esta dicotomía? Se ha sugerido que es un problema de conocimientos. Las ciencias fundamentales se expresan en términos matemáticos. Los «científicos» leen a Shakespeare, los «humanistas» no son sensibles a la belleza de las matemáticas. Yo creo que esta dicotomía tiene una razón más profunda, se debe a la manera en que es incorporada la noción de tiempo en cada una de las dos culturas.

En las ciencias naturales el ideal tradicional era alcanzar la certidumbre asociada a una descripción determinista. Hasta la mecánica cuántica persigue este ideal. En cambio, las ciencias humanas, ya se trate de la economía o la sociología, están dominadas por la noción de incertidumbre.

Lo que distingue a ambas culturas es la manera de describir el paso del tiempo. También se podrían tratar de distinguir por la complejidad de su objeto. La física se ocuparía de los fenómenos llamados simples, y las ciencias humanas de los complejos. Pero hoy el abismo entre los fenómenos llamados simples y los complejos se está reduciendo. Sabemos que las partículas llamadas elementales y los problemas de la cosmología corresponden a fenómenos sumamente complejos, que han dejado muy atrás las ideas que se tenían al respecto hace tan sólo unas décadas. En cambio, se han postulado modelos simples para describir (de forma esquemática, pero muy interesante) unos problemas que tradicionalmente se habían considerado complejos, como el funcionamiento del cerebro o el com-

portamiento de las sociedades de insectos. Así pues, la distinción basada en la idea de complejidad parece menos clara hoy que ayer.

Estoy totalmente de acuerdo con sir Karl Popper cuando dice que el problema central de la dicotomía entre las dos culturas es el tiempo. El tiempo es nuestra dimensión existencial fundamental. Es la base de la creatividad de los artistas, los filósofos y los científicos. La introducción del tiempo en el esquema conceptual de la ciencia clásica fue un inmenso progreso. Sin embargo, empobreció la noción de tiempo, porque no se hizo ninguna distinción entre pasado y futuro. En cambio, en todos los fenómenos que percibimos a nuestro alrededor, ya sea en física macroscópica, en química, en biología o en las ciencias humanas, el futuro y el pasado tienen distintos papeles. Encontramos por doquier una «flecha del tiempo». Se plantea, pues, la pregunta de cómo puede surgir del no tiempo la flecha del tiempo. ¿Es una ilusión el tiempo que percibimos? La cuestión nos lleva a la «paradoja» del tiempo, que es el eje de esta obra.

En la historia de la paradoja del tiempo se pueden distinguir tres etapas: la toma de conciencia de esta paradoja, a finales del siglo XIX, la reaparición de la misma en las últimas décadas, y su solución, que es muy reciente. La solución de la paradoja del tiempo es el tema central de estas páginas. En ella desempeñan un papel esencial las nociones de inestabilidad y caos.

No ignoro la dificultad de exponer estas cuestiones en un contexto tan limitado, porque la solución de la parado-

ja del tiempo está relacionada con problemas matemáticos nuevos y apasionantes, pero difíciles de describir con un vocabulario adecuado. Se requiere un esfuerzo simultáneo del autor y el lector.

Pero volvamos, para empezar, a la posición tradicional.

¿Podemos oponer «ser» y «devenir», lo mismo que oponemos «verdad» e «ilusión»? Como es sabido, esta era la posición de Platón, y también la de la física clásica. La aspiración de la física clásica era descubrir lo inmutable, lo permanente, más allá de las apariencias de cambio. La noción de suceso estaba excluida de esta descripción. Sin embargo, el afán de llegar a una física sin sucesos siempre ha tropezado con grandes dificultades. Ya Lucrecio se vio obligado a introducir la noción de «clinamen», que perturba la caída de los átomos en el vacío, para permitir la aparición de novedades. Asimismo, dos mil años después, en un artículo del famoso Einstein que describe la emisión espontánea de luz, leemos que el tiempo de emisión de los fotones está determinado por el azar. He aquí un paralelismo inesperado, si tenemos en cuenta que Lucrecio y Einstein están separados por la mayor revolución en la historia de nuestras relaciones con la naturaleza, el nacimiento de la ciencia moderna.

La ciencia moderna se basa en la noción de leyes de la naturaleza. Estamos tan acostumbrados a ella, que ha llegado a ser como una perogrullada, y sin embargo posee implicaciones muy profundas. Una de estas características esenciales es, precisamente, la eliminación del tiempo. Siempre he pensado que en esta eliminación tuvo una in-

fluencia importante el elemento teológico. Para Dios todo está dado. La novedad, la elección o la acción espontánea dependen de nuestro punto de vista humano. En los ojos de Dios el presente contiene el futuro y el pasado. En este sentido, el sabio, con su conocimiento de la naturaleza, se acerca al conocimiento divino. Hay que reconocer que este programa tuvo un éxito extraordinario. Muchas veces nos parecía que habíamos llegado a realizarlo completamente.

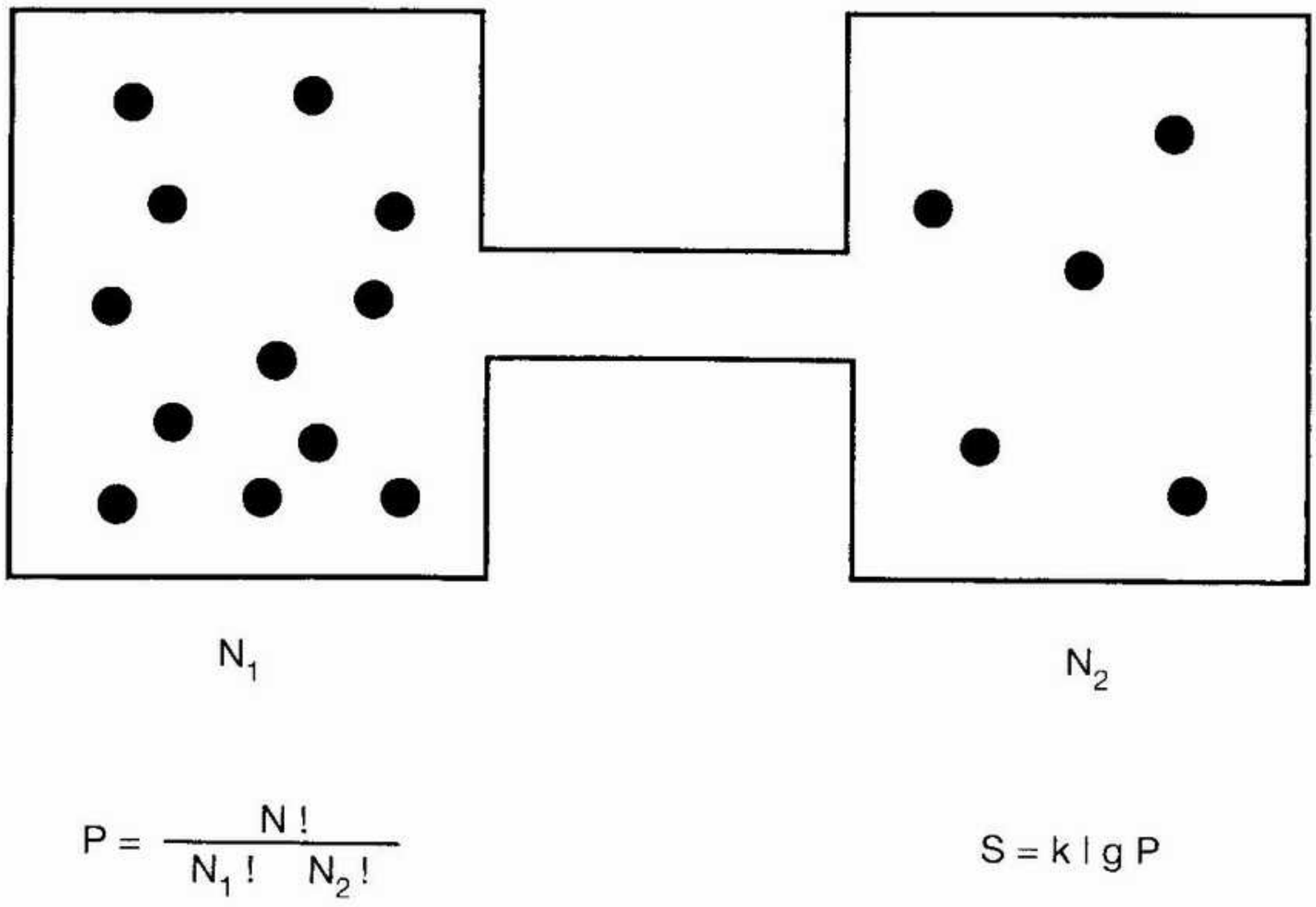
La física clásica se basaba en el estudio de la gravitación y el electromagnetismo. La física moderna ha añadido otras clases de interacción. Uno de los problemas que incluye la física actual en su programa es la unificación de las interacciones. A menudo se ha manifestado el deseo de descubrir una ley única de la que podrían derivar todas las demás. Esta esperanza estaba en la base del trabajo de Einstein sobre la teoría del campo unificado, y sigue siendo el tema central del libro de Stephen W. Hawking *Historia del tiempo.* Pero la unificación de las interacciones está muy lejos de ser el único problema que se plantea hoy. Ya desde el siglo XIX la aparición de ciencias basadas en paradigmas distintos había abierto otras perspectivas. La biología darwiniana y la termodinámica son ciencias de la evolución. La termodinámica es la ciencia de la edad industrial. Pero la rápida transformación de nuestra relación con la naturaleza provocó un fuerte desasosiego. El peligro que amenazaba a la humanidad era el agotamiento de las fuerzas de la naturaleza. Parecía que el universo estaba condenado a evolucionar hasta su muerte térmica.

La biología posterior a Darwin es la expresión de un paradigma evolucionista, pero el darwinismo hacía hincapié en la aparición de novedades, nuevas especies, nuevos modos de adaptación, nuevos nichos ecológicos, mientras que la visión termodinámica sólo hablaba de nivelación y muerte térmica. El universo habría empezado en un nivel de entropía muy bajo, correspondiente a un «orden» inicial, para llegar a la muerte térmica al cabo de un tiempo suficientemente largo.

Sea como fuere, la aparición de los paradigmas evolutivos hizo que la paradoja del tiempo volviera a entrar en el ámbito de la ciencia, ya que, por un lado, en la ciencia newtoniana no había flecha del tiempo, y por otro, el concepto de irreversibilidad es esencial tanto en termodinámica como en biología.

El primer científico que abordó la paradoja del tiempo fue el físico austriaco Ludwig Boltzmann, que trató de dar una justificación dinámica *microscópica* a la flecha del tiempo de la termodinámica (1872). Pero los trabajos de Boltzmann fueron duramente criticados. Le reprocharon su falta de lógica. El gran matemático Henri Poincaré llegó a escribir que no podía recomendar la lectura de Boltzmann porque no podía recomendar la lectura de textos cuyas conclusiones están en contradicción con las premisas. En efecto, parecía evidente que no se podía deducir una flecha del tiempo de la física clásica, basada en la equivalencia de pasado y futuro. Estas críticas hicieron que Boltzmann se echara atrás y asociara la entropía al «desorden».

El esquema de Boltzmann es bien conocido. Consideremos dos cajas conectadas por un conducto. Pongamos muchas partículas en una de las cajas, y unas pocas en la otra. Con el paso del tiempo hay una igualación progresiva del número de partículas: en esto consistiría la irreversibilidad. Pero si sólo fuera eso, se trataría realmente de una ilusión, porque si esperamos más tiempo podría ocu-



1. El esquema de Boltzmann.

rrir que las partículas se concentraran de nuevo en el mismo recipiente. En esta visión, la irreversibilidad solamente se debería a los límites de nuestra paciencia. Es justamente el ejemplo al que recurre R. S. Feynman para justificar la reversibilidad de las leyes fundamentales de la física.[3]

Esta eliminación de la flecha del tiempo fue aceptada con entusiasmo por eminentes físicos. Einstein escribió que el tiempo como irreversibilidad sólo es «ilusión», y a esta conclusión llegan autores tan conocidos como Feynman o Hawking. Pero como hemos escrito en otro lugar:

Quizá convenga, ante todo, subrayar el carácter casi inconcebible de esta idea de reversibilidad dinámica. El problema del tiempo —de lo que su flujo preserva, crea y des-

truye— ha sido siempre crucial para el hombre. Muchas especulaciones han puesto en entredicho la idea de novedad, y han afirmado el inexorable encadenamiento de causas y efectos. Muchas formas de saber místico han negado la realidad de este mundo mudable e inseguro, persiguiendo el ideal de una existencia que nos permita librarnos del dolor de la vida. Por otra parte, conocemos la importancia que tenía en la antigüedad la idea de un tiempo circular, que vuelve periódicamente a sus orígenes. Pero la eterna vuelta a sí mismo está marcada por la flecha del tiempo, como el ritmo de las estaciones o el de las generaciones humanas. Ninguna especulación, ningún saber ha sostenido nunca la equivalencia entre lo que se hace y lo que se deshace, entre una planta que brota, florece y muere, y una planta que resucita, rejuvenece y vuelve a su semilla primitiva, entre un hombre que madura y aprende y un hombre que poco a poco se hace niño, luego embrión, luego célula. Sin embargo la dinámica, teoría física que se suele identificar con el triunfo de la ciencia, implicaba desde su origen esta negación radical del tiempo. Eso fue lo que reveló el fracaso de Boltzmann, y no habían osado reconocer antes que él ninguno de los pensadores, como Leibniz o Kant, que habían hecho de la ciencia del movimiento el modelo inteligible del mundo.[4]

Al abordar la paradoja del tiempo no hay que olvidar que los físicos, desde el principio, habían realizado una elección específica del objeto de su estudio. En *Ciencia y método*[5] Poincaré hace hincapié en el hecho de que, para establecer leyes generales, el físico debe elegir fenómenos repetibles. Hoy quizá no estaríamos de acuerdo con el punto de vista de Poincaré. Lo que hoy nos interesa no es nece-

sariamente lo que podemos prever con certeza. Popper tiene una hermosa expresión, habla de relojes y nubes.[6] La física clásica se interesaba ante todo por los relojes, la física actual más bien por las nubes. Pero lo importante es que hoy podemos empezar a salir del molde específico en el que surgió la física clásica. Podemos admirar la sencillez del movimiento planetario, la precisión asociada a los relojes, pero también podemos reconocer su carácter particular, casi único. Esta transformación de nuestro punto de vista es uno de los objetos de este libro. Tengo la impresión de que vivimos un momento privilegiado. La física está en un punto de transición, se abre a un mundo de nuevos dilemas, y al mismo tiempo a una mejor comprensión de su historia pasada.

Me gustaría hablar ahora de la reaparición del problema del tiempo en las últimas décadas. Es un fenómeno curioso, porque coincide con un momento particular de la historia social y política. De alguna forma notamos el paso del tiempo. Ya se trate de los sucesos que nos dan una nueva visión de Europa occidental, o de los sucesos del Este, advertimos que nos encontramos en un período de «bifurcación» al que no se aplica el concepto de la ley clásica de la naturaleza. Nos resulta más difícil aceptar que la noción de suceso es una ilusión. Sin embargo, era este el punto de vista de la física clásica, y lo teníamos tan asumido que un suceso nos llegaba a parecer algo casi anticientífico.

¿Cuáles son los grandes sucesos de la historia del mundo? Sin duda, el nacimiento del universo o el nacimiento de la vida. A ese respecto Asimov ha escrito una divertida

historia. ¿Seremos capaces de vencer algún día el segundo principio de la termodinámica? Esta es la pregunta que un pueblo, de generación en generación, de civilización en civilización, le hace a un ordenador gigante en el relato de Asimov *The last question*.[7] Pero el ordenador siempre contesta lo mismo: «no hay datos suficientes». Pasan miles de millones de años, las estrellas y las galaxias mueren, pero el ordenador, conectado directamente al espacio-tiempo, sigue calculando. Al final el universo está muerto, pero el ordenador ya conoce la respuesta. Ahora sabe cómo vencer el segundo principio, y justo en ese momento nace un nuevo universo.

La reaparición de la paradoja del tiempo se debe, sobre todo, a dos descubrimientos. El primero es el de las estructuras de no equilibrio, o estructuras «disipativas». Esta nueva física del no equilibrio ha sido objeto de numerosas exposiciones,[8] de modo que no me extenderé sobre el tema. Únicamente recordar que hoy sabemos que la materia se comporta de una forma radicalmente distinta en las condiciones de no equilibrio, cuando los fenómenos irreversibles desempeñan un papel fundamental. Uno de los aspectos más espectaculares de este nuevo comportamiento es la formación de estructuras de no equilibrio que sólo existen mientras el sistema disipa energía y permanece en interacción con el mundo exterior. He aquí un evidente contraste con las estructuras de equilibrio, como los cristales, que una vez formados pueden permanecer aislados y son estructuras «muertas» sin disipación de energía.

El ejemplo más sencillo de estructura disipativa que se

puede poner, un poco por analogía, es la ciudad. Una ciudad es distinta del campo que la rodea. La raíz de esta individuación son las relaciones que establece con el campo colindante. Si se suprimieran esas relaciones la ciudad desaparecería.

Las dos ramas de la ciencia en que han sido más estudiadas las estructuras disipativas son la hidrodinámica y la cinética química. A estas ramas se han sumado recientemente la óptica de los rayos láser.

Un ejemplo bien conocido en hidrodinámica es la inestabilidad de Bénard. Este experimento consiste en calentar un líquido por abajo. Cuando se crea una diferencia de temperatura lo bastante grande, aparecen remolinos en los que se suceden millones de partículas. Así el no equilibrio crea correlaciones de *largo alcance*. Yo suelo afirmar que la materia en equilibrio es ciega, cada molécula sólo ve las primeras moléculas que la rodean. En cambio, el no equilibrio hace que la materia «vea». Aparece entonces una nueva coherencia. La variedad de las estructuras de no equilibrio que se van descubriendo resulta asombrosa. Estas estructuras revelan el papel creador fundamental de los fenómenos irreversibles, y por lo tanto la flecha del tiempo.

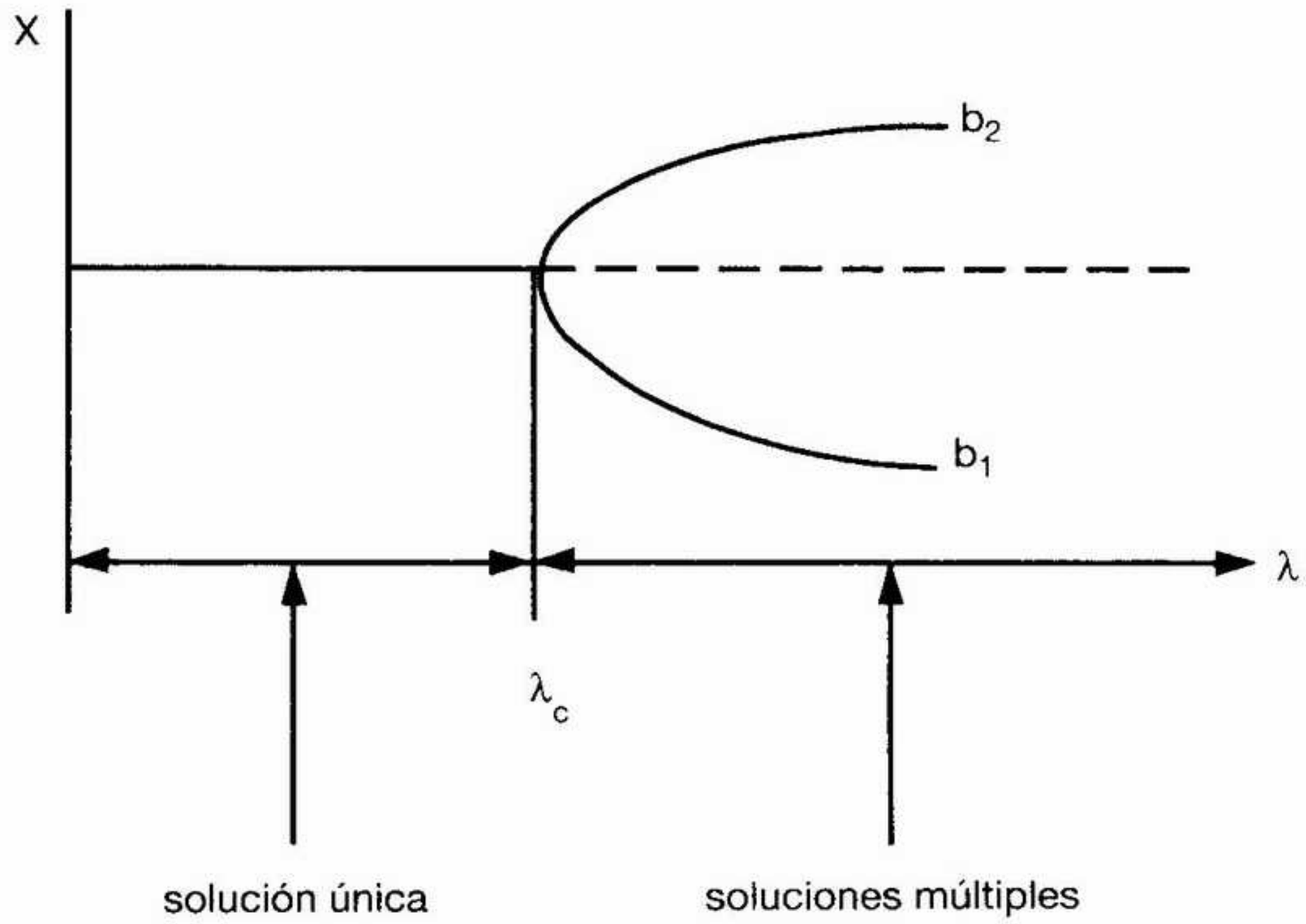
Tomemos un recipiente que contenga materia, *aislada* del mundo. Este sistema va a alcanzar el equilibrio. Si observamos las moléculas al microscopio, veremos un movimiento desordenado incesante: es el «caos molecular» (que no es lo mismo que el caos «dinámico», como veremos). Si ahora abrimos el sistema y permitimos que penetren en él flujos de energía y de materia, la situación cambia radi-

calmente. Por un lado, a escala macroscópica, se producen fenómenos irreversibles, flujo de calor, reacciones químicas que llevan a nuevas estructuras espaciotemporales imposibles de realizar en equilibrio. Por otro lado, el caos molecular se organiza y da lugar a rupturas de simetría temporal y espacial.

Veamos dos ejemplos de «estructuras disipativas». Uno de ellos son los osciladores químicos. Para simplificar, representemos el sistema formado por moléculas X e Y de colores «distintos». La imagen intuitiva que nos formamos de las colisiones es la de encuentros casuales. Deberíamos esperar encontrarnos con destellos azules asociados a X o rojos asociados a Y. En lugar de esto, vemos una alternancia periódica de los colores rojo y azul.

Hoy conocemos muchos osciladores químicos. La aparición de la solución oscilante lejos del equilibrio se produce a partir de un punto de «bifurcación». Los puntos de bifurcación corresponden al diagrama representado en la figura 2.

De los puntos de bifurcación emergen varias soluciones. La elección de estas soluciones viene dada por un proceso probabilista. Cuando se repite el experimento en situaciones ideales, en el caso de la figura 2 se obtiene un cincuenta por ciento de sistemas que van por la rama (b_1), y otro cincuenta por ciento por la rama (b_2). Por supuesto, suele haber otras bifurcaciones después de la primera. Así pues, la evolución se realiza a través de una sucesión de estadios descritos por leyes deterministas y leyes probabilistas. La probabilidad y el determinismo no se opo-

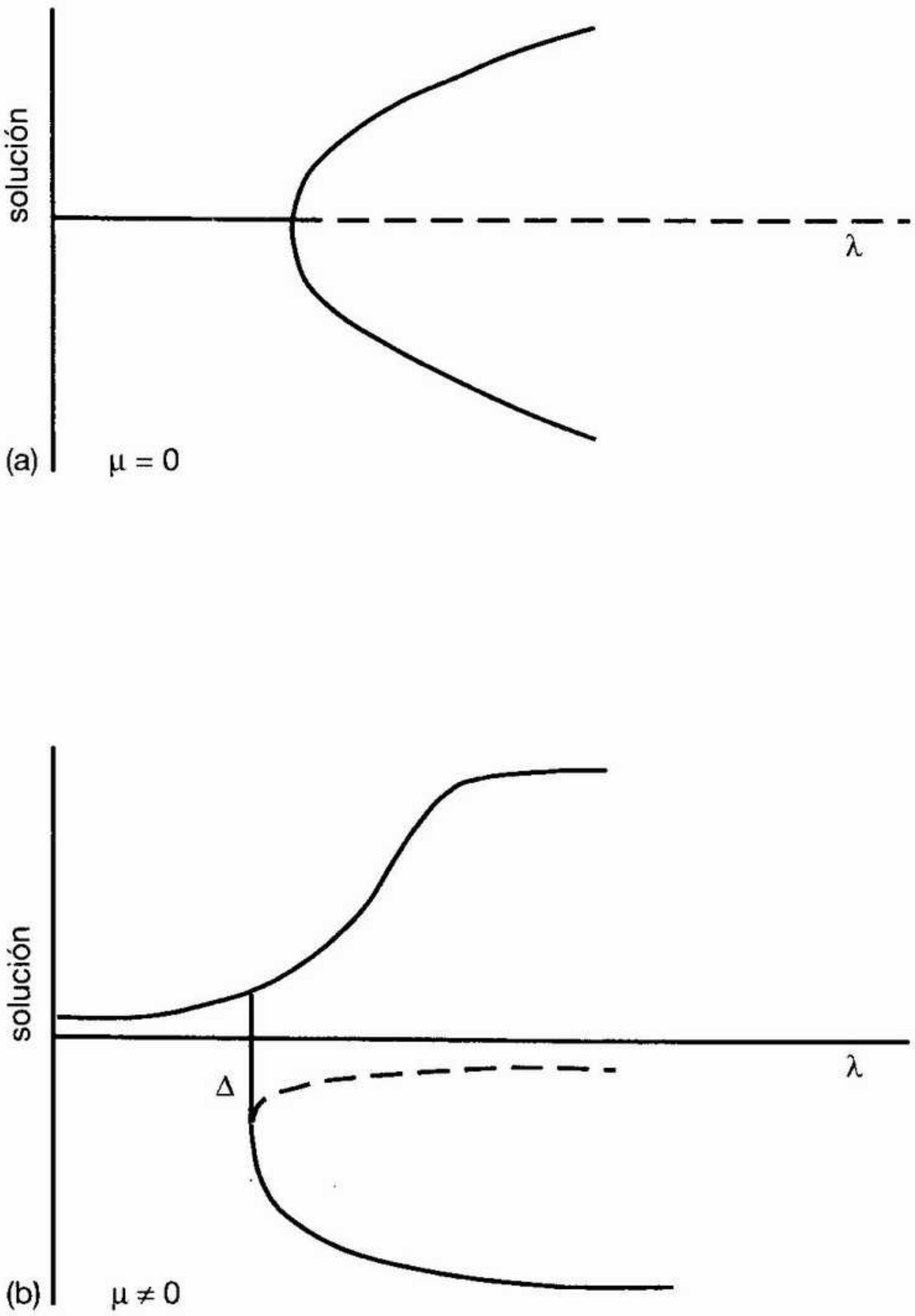


2. Puntos de bifurcaciones.

nen ni siquiera a escala macroscópica, sino que se complementan. La existencia de bifurcación da un carácter histórico a la evolución de un sistema. La historia se introduce entonces en los sistemas más simples de la química y la hidrodinámica.

Una propiedad destacada de estas bifurcaciones es su sensibilidad, el hecho de que pequeñas variaciones en la naturaleza del sistema lleven a la elección preferente de una de las dos ramas. Para eso basta con romper la simetría. La figura 2 representa una bifurcación ideal, mientras que la figura 3 representa una bifurcación incompleta debida a la presencia de un campo que rompe la simetría entre las dos ramas.

Veamos ahora un ejemplo muy interesante de mecanis-



3. Bifurcación incompleta. Selección de una bifurcación a través de una perturbación relacionada con el campo exterior μ y obtenido con ruptura de simetría. La separación mínima Δ entre las ramas perturbadas tiene que superar la perturbación causada a las fluctuaciones.

mos de esta ruptura de simetría. Me refiero a un trabajo reciente de Kondepudi y sus colaboradores titulado «Chiral symmetry breaking in sodium chlorate crystallization».[9] Las moléculas de clorato de sodio $NaClO_3$ son ópticamente inactivas, es decir, que no hacen girar el plano de polarización de la luz. En cambio los cristales de $NaClO_3$ son ópticamente activos, y hay dos formas: una forma dextrógira y otra levógira. Si se enfría una solución de $NaClO_3$, se forma el mismo número de cristales levógiros y dextrógiros, aparte de algunas fluctuaciones estadísticas. Supongamos que agitamos la solución mientras se enfría. Entonces comprobaremos que las moléculas dan todos los cristales levógiros o todos dextrógiros. ¿Cómo es posible? Se puede considerar que la elección entre un cristal dextrógiro y uno levógiro es como una bifurcación. En el medio en reposo estas bifurcaciones son independientes. Un cincuenta por ciento se comporta de una manera y el otro cincuenta por ciento de la otra. En un sistema agitado la primera bifurcación da lugar ya sea a una forma levógira, ya sea a una forma dextrógira. A causa de la agitación los gérmenes de los primeros cristales se difunden por el medio. Por eso encontramos sólo cristales levógiros, o sólo cristales dextrógiros. El campo que rompe la simetría del sistema de la figura 3 es producido aquí por la agitación.

Resulta divertido recordar la importancia que daba Pasteur a la simetría molecular. Para él la diferencia entre los cristales dextrógiros y los levógiros era esencial para entender el fenómeno de la vida. Pasteur escribió: «La vida

(a) (b) (c)

4. Estructuras de Turing.

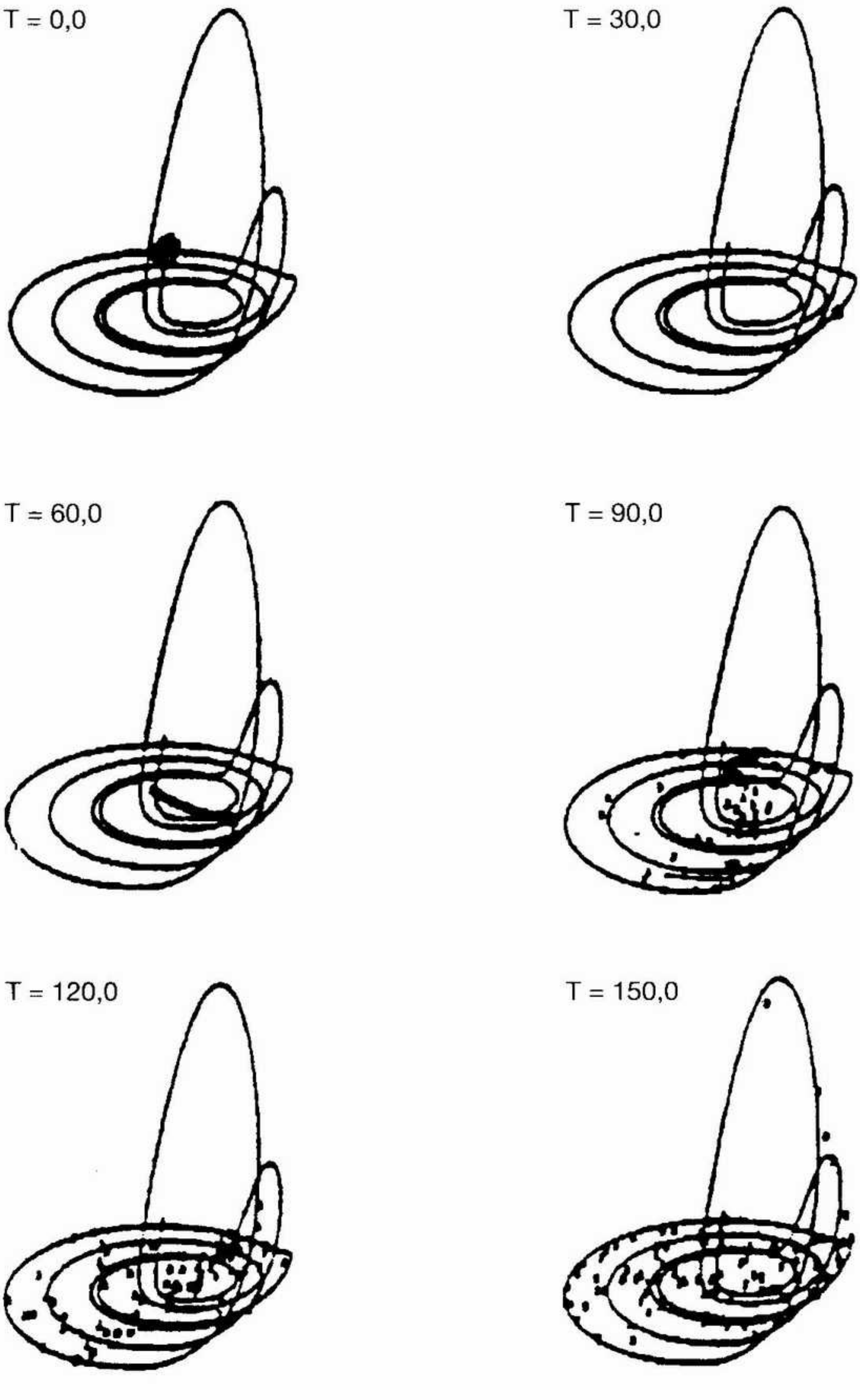
tal como se nos presenta es una función de la asimetría del universo y una consecuencia de este hecho». El universo es asimétrico. Hoy entendemos mejor esta afirmación, porque la ruptura de la simetría a la que alude Pasteur está relacionada con el no equilibrio, con la irreversibilidad. En cuanto a esta última, aparece como una consecuencia de la inestabilidad inherente a las leyes dinámicas de la materia.

Vamos a pasar ahora a otra manifestación espectacular de la ruptura de simetría introducida por la flecha del tiempo. Es la formación de las estructuras estacionarias de no equilibrio. Turing había predicho la formación de dichas estructuras en un trabajo fundamental de 1952,[10] y nuestro grupo la estudió de una forma más cuantitativa en los años sesenta.[11] Pero hasta hace algunos años no se han observado estas estructuras en los laboratorios de Burdeos[12] y Austin,[13] Texas (figura 4). La principal dificultad experimental era evitar las corrientes de convección que destruyen las estructuras. En el aspecto teórico, lo que re-

sulta quizá más importante en su observación es que podemos verificar la aparición de dimensiones intrínsecas debidas a los fenómenos irreversibles. Esencialmente, la distancia entre las «mallas» de estas estructuras está determinada por la relación $\sqrt{D/k}$, en la que D es un coeficiente de difusión y k el inverso de un tiempo relacionado con la velocidad de reacción química. Vemos aparecer así toda una nueva cristalografía de no equilibrio.

Los ejemplos anteriores se refieren a la formación de estructuras. Pero los procesos de no equilibrio también pueden dar lugar a señales no periódicas, más irregulares. Se habla entonces de *caos* disipativo temporal o de caos espaciotemporal (véase figura 5).

Insistimos en el hecho de que, a escala molecular, se trata siempre de fenómenos colectivos que afectan a miles de millones de moléculas. La irreversibilidad lleva a nuevos fenómenos de orden. Lo que también conviene recordar es que, ya a escala macroscópica, estamos ante una «mezcla» de determinismo y probabilidad. Einstein, en uno de sus últimos trabajos,[14] volvía sobre el papel de las probabilidades en física, y llegaba a la conclusión de que los que pensaban que el carácter estadístico de la mecánica cuántica acabaría con el determinismo a nivel *macroscópico*, el nuestro, iban a quedar defraudados. Las consideraciones estadísticas de la mecánica cuántica sólo se aplicaban a nivel microscópico. Este es uno de los aspectos interesantes del estudio de los puntos de bifurcación que acabo de mencionar. Estos puntos de bifurcación revelan que incluso a escala macroscópica la predicción que po-



5. Caos espaciotemporal. Los puntos representativos concentrados primero en una región (la bola negra en el tiempo inicial T = 0) se distribuyen progresivamente a lo largo de las trayectorias de un sistema caótico (ilustración por cortesía de G. Nicolis).

demos hacer del futuro es una mezcla de determinismo y probabilidades. En el punto de bifurcación la predicción tiene un carácter probabilista, mientras que entre los puntos de bifurcación podemos hablar de leyes deterministas.

En todos estos ejemplos vemos que la «flecha del tiempo» es creadora de estructuras. Sólo podemos hablar de «sistema» en las situaciones de no equilibrio. Sin las correlaciones de largo alcance debidas al no equilibrio no habría vida ni, *a fortiori*, cerebro.

En consecuencia, los fenómenos de no equilibrio hacen que reaparezca la paradoja del tiempo. Ante todo vemos el papel «constructivo» del tiempo. Los fenómenos irreversibles no se reducen, como se pensaba antes, a un aumento del «desorden». Estos fenómenos, por el contrario, tienen un papel constructivo muy importante. Pero esto nos obliga a revisar nuestras ideas sobre los fundamentos dinámicos de los fenómenos irreversibles. En la imagen clásica la irreversibilidad se debía a nuestras aproximaciones, a nuestra ignorancia. Somos nosotros quienes introducimos la irreversibilidad en una naturaleza que es reversible en el tiempo y determinista. Una manera más sofisticada de expresar la misma idea era hablar de «grano grueso» *(coarse graining)*. Además de los resultados de la dinámica, debíamos tener en cuenta que en el mundo macroscópico sólo podemos apreciar magnitudes *medias*. Esta imagen de «grano grueso» es, pues, otra forma de expresar la idea de que nuestra ignorancia es la que lleva a la irreversibilidad. Como mucho, se podrían sostener estas ideas a propósito de manifestaciones muy simples y de fenóme-

nos irreversibles, como la viscosidad o la difusión. Pero es imposible ante los osciladores químicos o las estructuras de Turing, pues se llegaría a conclusiones absurdas. Habría que atribuir el funcionamiento de nuestra vida a nuestra ignorancia, o relegarla a lo que es solamente fenomenológico.

¿Es menos «fundamental» la vida que la no vida? Por suerte, como veremos a continuación, hoy podemos relacionar la irreversibilidad no ya con nuestra ignorancia, sino con la estructura fundamental de las leyes de la dinámica clásica o cuántica, formuladas para los sistemas inestables o caóticos. Feynman, en su obra *El carácter de la ley física*, describía bien la imagen clásica del mundo cuando comparaba la naturaleza con una inmensa partida de ajedrez. Cada movimiento, tomado aisladamente, sería simple, y tanto la complejidad como la irreversibilidad serían consecuencia del elevado número de elementos en juego. Pero hoy es difícil aceptar esta imagen, pues a una escala elemental ya aparece, como veremos, el problema de la inestabilidad.

Otra manera de tratar de eliminar la irreversibilidad es hacer alusión al principio antrópico. Es lo que hace Stephen Hawking en su citada obra *Historia del tiempo*. En ella leemos: «Se necesita una flecha termodinámica fuerte para que la vida inteligente pueda actuar...» y más adelante «en resumen, las leyes de la física no hacen distinción entre las direcciones futura y pasada del tiempo».[15] Pero ¿cómo se pueden conciliar ambas afirmaciones? Si se necesita una flecha termodinámica fuerte para que pueda desarrollarse la vida inteligente, es necesario que esa fle-

cha termodinámica tenga una contrapartida en nuestra descripción del universo. Tiene que ser tan real como cualquier otro fenómeno físico. Es cierto que la introducción de la irreversibilidad nos obliga a formular de nuevo las leyes de la dinámica. Dado que las leyes de la dinámica tradicional, ya se trate de la dinámica clásica, cuántica o relativista, no contienen la dirección del tiempo, hay que formular de nuevo las leyes de la dinámica. Se trata, sin duda, de una tarea muy ambiciosa. Me viene a la mente una pregunta que solía hacer Heisenberg: «¿Qué diferencia hay entre un pintor abstracto y un físico teórico?». Y daba la siguiente respuesta: Un pintor abstracto quiere ser lo *más* original posible, mientras que un físico teórico tiene que ser lo *menos* original posible. Estoy de acuerdo con Heisenberg, y si creo que hay que formular de nuevo las leyes de la dinámica, lo cual, efectivamente, puede parecer demasiado ambicioso, es porque no veo otra forma de introducir el tiempo en la descripción física del mundo. Esta introducción del tiempo en el nivel fundamental de descripción es una necesidad ineluctable, después de lo que hemos descubierto en las últimas décadas sobre el papel constructivo de la irreversibilidad.

Ya hemos mencionado que la reaparición de la paradoja del tiempo se debía a dos hechos igual de inesperados. El primero es el descubrimiento de las estructuras de no equilibrio. El segundo está relacionado con la renovación de la dinámica clásica. Esta renovación es una muestra del carácter imprevisible del desarrollo de la ciencia. Todos esperaban que hubiera nuevos descubrimientos en

el ámbito de la mecánica cuántica o de la relatividad, pero el hecho de que la dinámica clásica, la más antigua de las ciencias, se transformara totalmente tres siglos después es un acontecimiento tal vez único en la historia de las ciencias.

3

Vamos a centrar ahora nuestra atención en el mundo microscópico, en el mundo de la dinámica. Ya he mencionado la batalla que libró Boltzmann para introducir el segundo principio de la termodinámica en la física clásica. Se vio obligado a concluir que la irreversibilidad postulada por la termodinámica era incompatible con las leyes reversibles de la dinámica. Parecía que el hecho de que en relatividad y en mecánica cuántica se mantuviera el mismo punto de vista confirmaba sus conclusiones. Las leyes básicas cuánticas o relativistas son reversibles en relación con el tiempo, lo mismo que las de la dinámica clásica. Pero en los últimos años ha habido un cambio espectacular. Un ejemplo de este nuevo punto de vista que se abre camino hoy es la declaración solemne de sir James Lighthill en 1986, a la sazón presidente de la Unión Internacional de Mecánica Pura y Aplicada. Lighthill se expresaba así:

Llegados a este punto debo hacer un alto y hablar en nombre de la gran hermandad de los expertos de la mecánica. Hoy somos muy conscientes de que el entusiasmo que sen-

> tían nuestros predecesores por el éxito maravilloso de la mecánica newtoniana les llevó a hacer generalizaciones, en el campo de la predicción ..., que hoy han resultado ser falsas. Queremos pedir disculpas colectivamente por haber inducido a error al público culto al propagar, a propósito del determinismo de los sistemas que cumplen las leyes newtonianas del movimiento, unas ideas que después de 1960 ya no se pueden sostener.[16]

He aquí una declaración verdaderamente singular. Los historiadores de la ciencia están acostumbrados a revoluciones en las que una teoría se viene abajo y otra triunfa. Cualquiera de nosotros puede cometer errores, y lo que debe hacer después es disculparse por haberlos cometido. Pero es de todo punto excepcional que los expertos reconozcan que durante tres siglos se han equivocado en un aspecto esencial de su ámbito de trabajo.

La renovación de la dinámica, la más antigua de las ciencias occidentales, es un fenómeno único en la historia de las ciencias. Durante mucho tiempo el determinismo era el símbolo de la inteligibilidad científica, mientras que hoy se reduce a una propiedad que sólo es válida en casos límite. Estos casos límite corresponden, precisamente, a los sistemas dinámicos estables. De modo que la noción de probabilidad que había introducido Boltzmann para poder expresar la flecha del tiempo ya no corresponde a nuestra ignorancia, y adquiere un significado objetivo.

La razón de la declaración de sir James Lighthill es, concretamente, el descubrimiento de los sistemas dinámi-

cos caóticos. El simple hecho de que unos sistemas puedan volverse caóticos no es ninguna novedad. El ejemplo clásico es la transición entre movimiento laminar y turbulento. Pero un líquido es un sistema complejo, con una población enorme de partículas en interacción. Es un sistema tan complejo que no podemos pretender describirlo en términos de trayectorias individuales. En consecuencia, los físicos podían pensar que se podía proceder por aproximaciones, y una vez más el caos y la irreversibilidad podían ser resultado de estas aproximaciones. Pero la novedad reside en que actualmente tenemos sistemas caóticos muy simples, y ya no nos sirve la coartada de la complejidad. El carácter inestable e irreversible pasan a ser parte integrante de la descripción en el nivel fundamental.

Veamos, para empezar, un ejemplo sencillo: el desplazamiento de Bernoulli. Se trata de una interacción muy simple. Se toma un número cualquiera x, comprendido entre 0 y 1. Se multiplica por 2 a intervalos regulares, por ejemplo a cada segundo, y se resta la parte que excede de la unidad. Obtenemos así $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$. Se conoce como «ecuación del movimiento». Es fácil obtener así sucesiones de números (por ejemplo, 0,13; 0,26; 0,52; 0,04; 0,08...). Los números sucesivos crecen hasta exceder la unidad y luego se insertan de nuevo en el intervalo 0-1 (véase la figura 6a). Para entender lo que pasa se puede representar el número x en sistema binario, es decir:

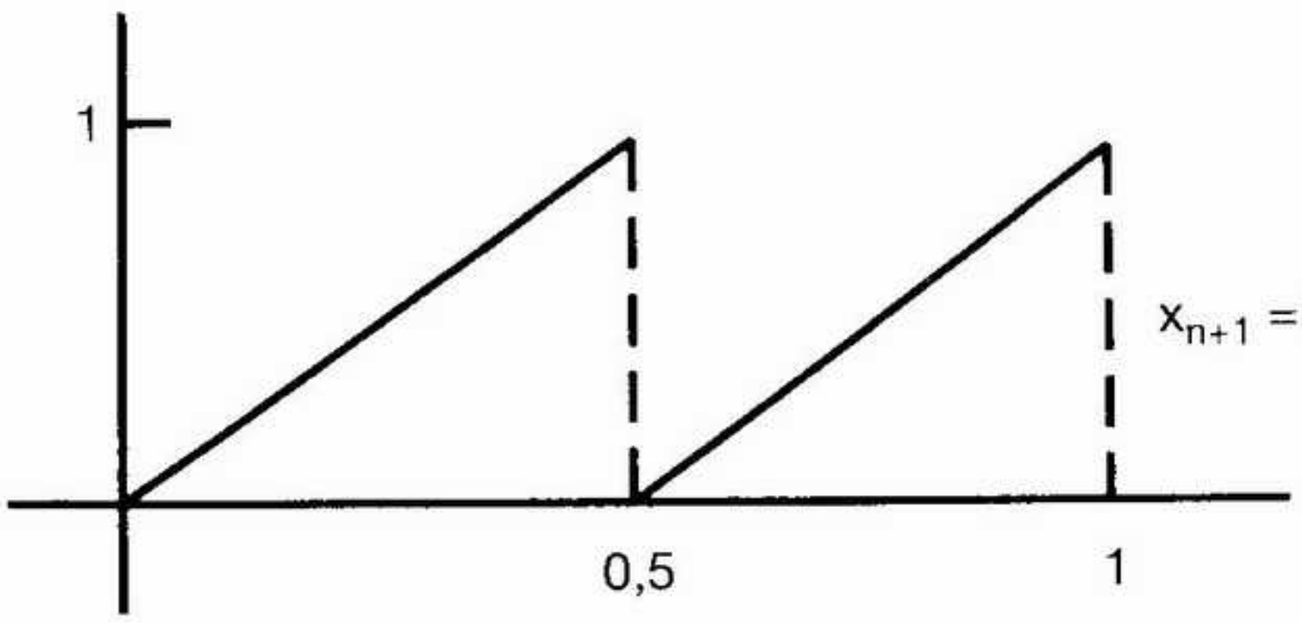
$$x = \frac{u_{-1}}{2} + \frac{u_{-2}}{4} + \frac{u_{-3}}{8} + \ldots$$

donde u_{-1}, u_{-2}, ... son números iguales a 0 o 1. El desplazamiento $x_{n+1} = 2x_n$ (mod. 1) corresponde entonces al desplazamiento $u'_n = u_{n-1}$. Todos los números u_i están desplazados a la izquierda. Tomemos ahora dos números que difieran muy poco, por ejemplo a partir de los números $\frac{u_{-40}}{2^{40}}$.

¡Al cabo de 40 desplazamientos la diferencia será de $\frac{1}{2}$!

En esto consiste la «sensibilidad a las condiciones iniciales», ya que el más mínimo error en la condición inicial $(\delta x)_0$ lleva a una amplificación exponencial. Unas causas tan pequeñas como se quiera tienen consecuencias esenciales en el comportamiento del sistema. La separación entre dos números cercanos aumenta exponencialmente, o también, con arreglo a esta ley, la distancia entre «dos trayectorias» aumenta exponencialmente con el tiempo $(\delta x)_n = (\delta x)_0 \exp \lambda n$. El coeficiente λ se llama exponente de Liapunov, y $1/\lambda$ es el tiempo de Liapunov. Los sistemas que presentan esta divergencia exponencial son, por definición, sistemas «caóticos». Poseen una escala intrínseca de tiempos definida por el tiempo de Liapunov $1/\lambda$. Después de una evolución larga con respecto al tiempo de Liapunov se pierde la memoria del estado inicial. ¿Qué se puede hacer en esta situación? La noción de trayectoria, que es el instrumento fundamental de la dinámica clásica, es una idealización inapropiada en este caso, porque las trayectorias se desvanecen después de tiempos largos con respecto a $1/\lambda$. El desplazamiento de Bernoulli es el prototipo del caos dinámico. Debemos, pues, inclinarnos por una

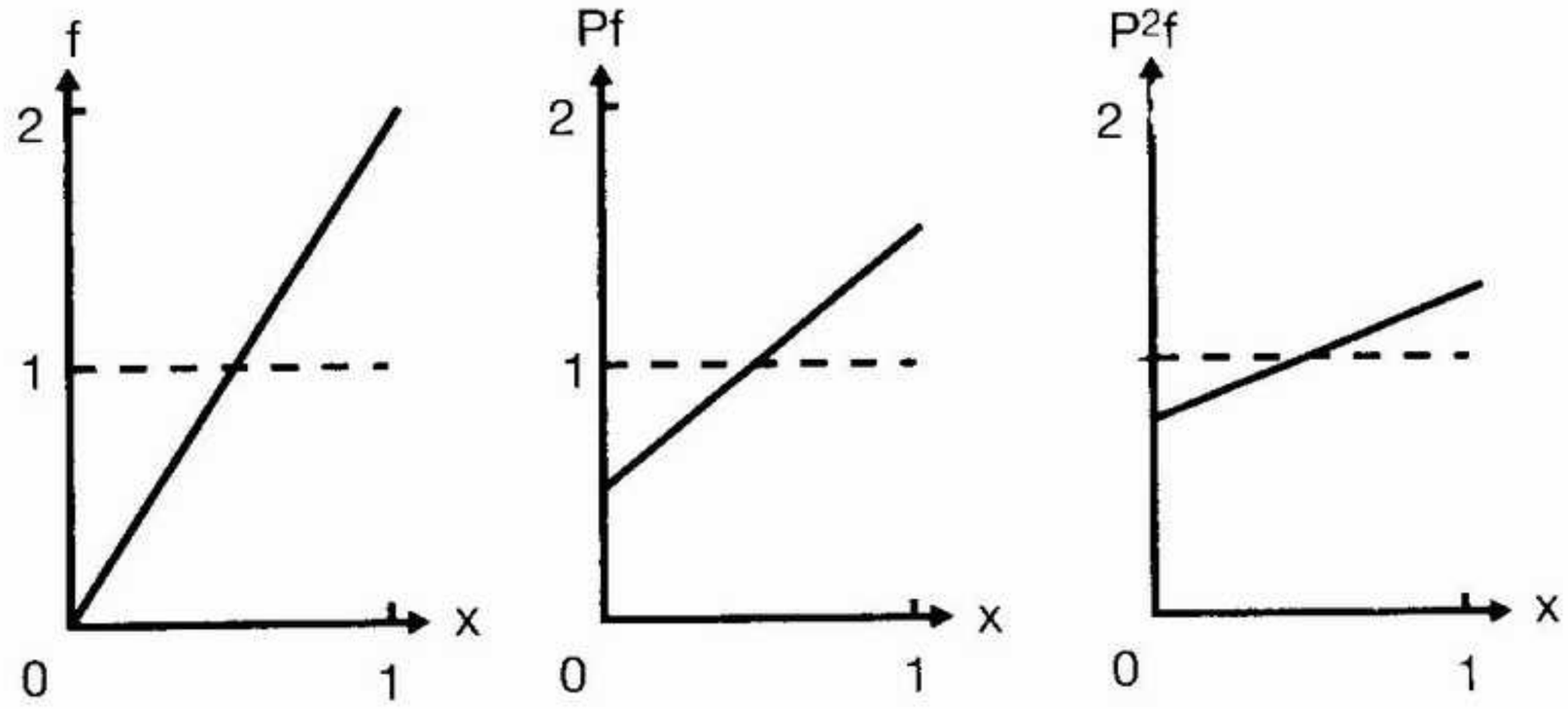
(a)



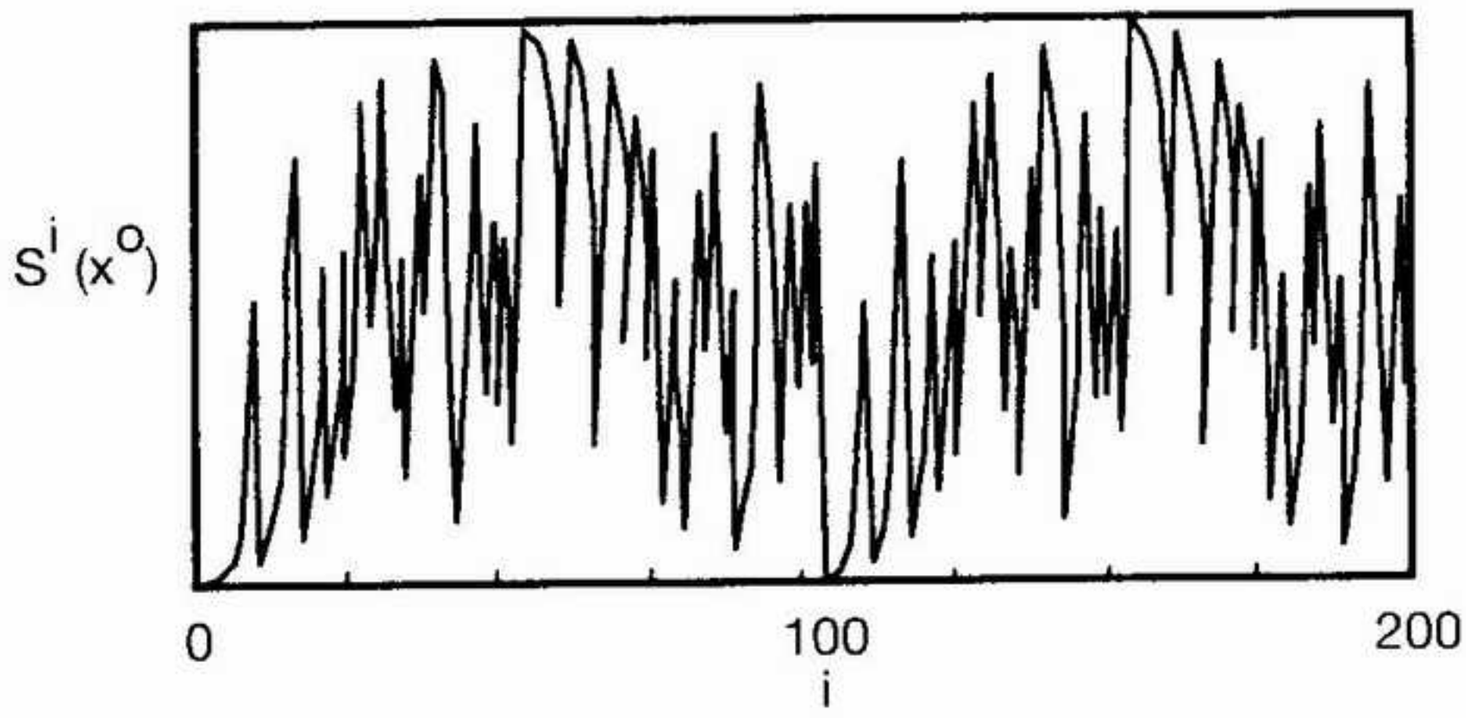
$$x = \frac{u_{-1}}{2} + \frac{u_{-2}}{4} + \frac{u_{-3}}{8} \quad \cdots\cdots \cdot u_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$u'_n = u_{n-1}$ desplazamiento a la izquierda

(b)



(c)



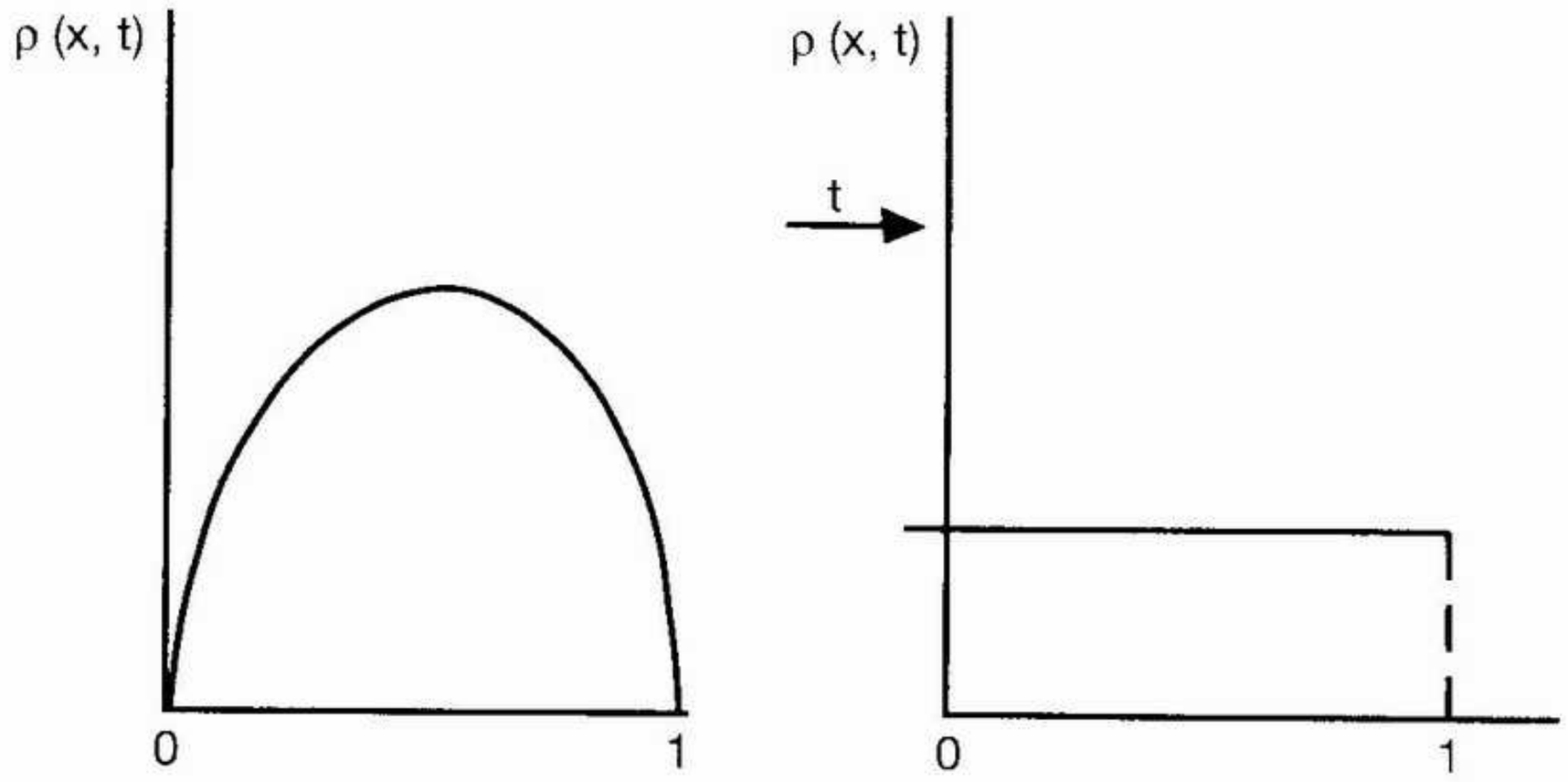
6. Diagrama de Bernoulli y transformaciones diádicas. *a*) Diagrama de Bernoulli; *b*) Con una densidad inicial y = 2x, las aplicaciones sucesivas del operador de Perron-Frobenius correspondiente a la transformación diádica resultan en densidades que se aproximan a $\rho \equiv 1$, y *c*) trayectoria calculada partiendo del valor inicial $x^o \cong 0{,}0005$. Compárese la irregularidad de esta trayectoria con el lento acercamiento de la densidad en (b) a un límite. [Figuras *b* y *c*: A. Lasota y M. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.]

aproximación estadística basada en el empleo de probabilidades. Es un hecho de la mayor importancia, porque al abandonar las trayectorias nos apartamos de las certidumbres tranquilas de la dinámica clásica. En realidad es lo que Boltzmann había propuesto hace cien años, pero ahora la introducción de probabilidades corresponde a una necesidad objetiva relacionada con la inestabilidad.

Así pues, introducimos una función de distribución estadística $\rho(x,t)$ (figura 7) que da la probabilidad de realizar el número x en el tiempo t (o al cabo de n iteracciones). La descripción estadística corresponde a una generalización del concepto de trayectoria, que encontramos cuando tomamos una distribución $\delta(x - x_0)$ (véase la figura 7). La función $\delta(x - x_0)$ es «singular». Es distinta de cero para $x = x_0$ y nula para todos los demás valores. Entonces sabemos que hay una trayectoria en el punto x_0. Ya volveremos sobre el papel de las distribuciones que son funciones singulares.

¿Qué se puede decir de la evolución de la función de distribución ρ en el tiempo? Un teorema importante (véase, por ejemplo, Schuster)[17] es que, en el caso del desplazamiento de Bernoulli, la distribución tiende a la uniformidad en el intervalo entre 0 y 1 (en términos técnicos, esto significa que el desplazamiento de Bernoulli está «mezclado», véase el Apéndice). Pero nos gustaría ir más lejos y analizar cuantitativamente esta evolución de la distribución inicial hacia la evolución alcanzada asintóticamente con el tiempo. Podemos escribir formalmente:

$$\rho_{n+1}(x) = U\ \rho_n(x)$$



7. Descripción estadística.

donde $\rho_{n+1}(x)$ es la distribución estadística al cabo de n + 1 desplazamientos, y $\rho_n(x)$ después de n desplazamientos. El operador U transforma, pues, ρ_n en ρ_{n+1}, y recibe el nombre de «operador de Perron-Frobenius».

La física de las trayectorias se convierte ahora en la física de las funciones de distribución. Las leyes del movimiento —en el caso de Bernoulli es simplemente la recurrencia $x_{n+1} = 2x_n$ (mod. 1)— pasan a ser las leyes de evolución de ρ por efecto del operador de evolución U.

En el caso de Bernoulli podemos dar la forma explícita de este operador. Estos son los resultados (el lector que esté interesado en los cálculos podrá encontrarlos en el Apéndice):

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[\rho_n\left(\frac{x}{2}\right) + \rho_n\left(\frac{1+x}{2}\right)\right]$$

Es fácil comprobar que si ρ_n es una constante, ρ_{n+1} también lo será (se mantiene la distribución uniforme). Asimismo, si

$$\rho_n(x) = x,\ \rho_{n+1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2},$$

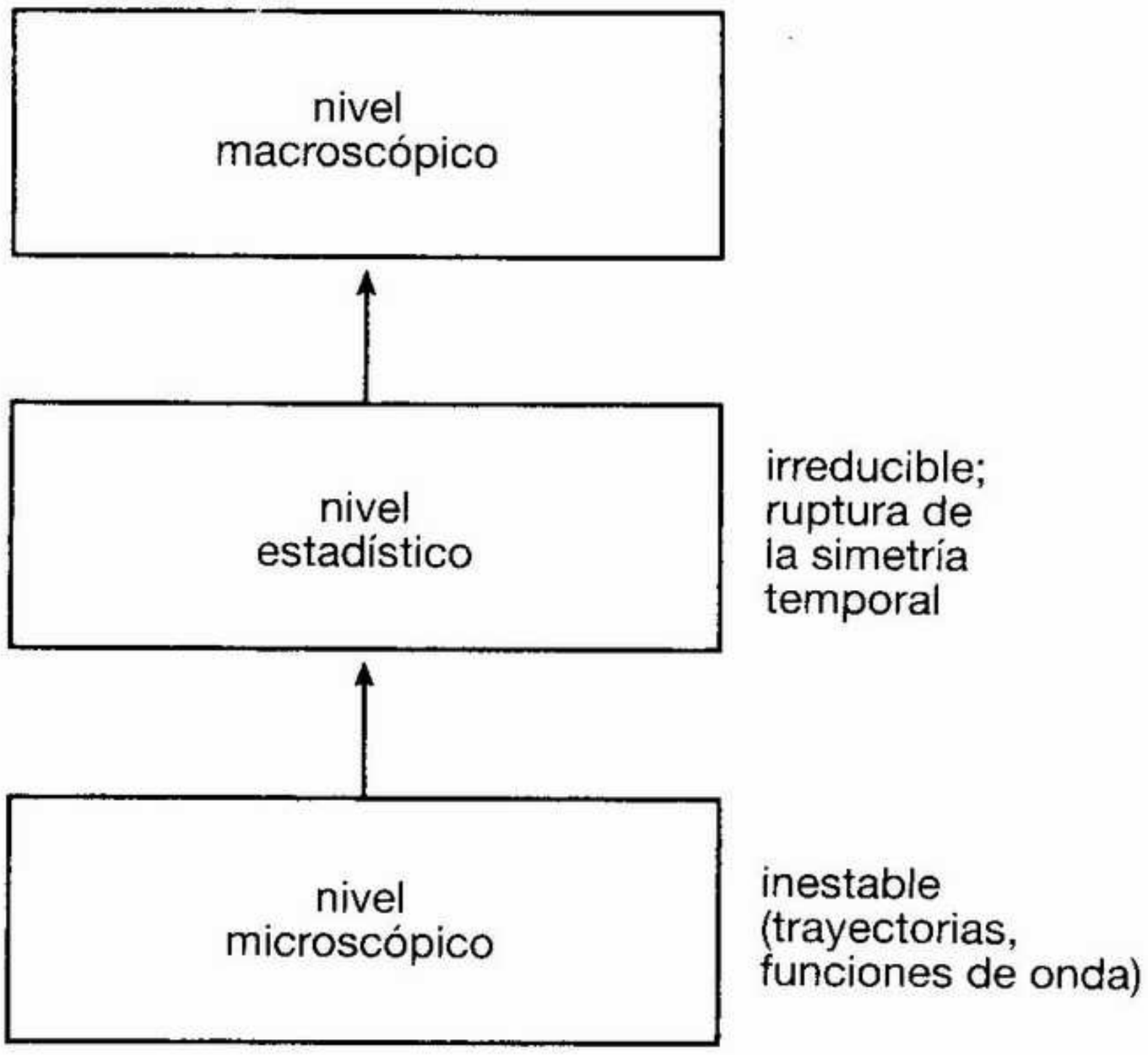
y las sucesivas iteraciones aproximarán ρ a una constante, como en la figura 6.

Por consiguiente, debemos analizar el operador *U*. Como ya se ha dicho, el problema del cálculo de las trayectorias es reemplazado por el del análisis de las propiedades del operador de evolución *U*. En esto consiste la novedad de nuestro método. El hecho de que la inestabilidad lleve a la introducción de probabilidades no tiene nada de extraño, y ha sido destacado por numerosos autores.[18]

Pero para nosotros la necesidad de desarrollar las matemáticas con el fin de realizar el análisis del operador *U*, que describe la evolución de las probabilidades, es sólo el punto de partida. En ese preciso momento se plantea el problema esencial: ¿cómo se establece a este nivel la ruptura de simetría temporal (figura 8)? Cuando hablamos de nueva formulación de las leyes de la naturaleza, es precisamente en términos de propiedades del operador de evolución. Como ya he señalado, esta exposición requiere una precisión mínima, porque pretende introducir al lector en sectores de las matemáticas que se han empezado a explorar en época muy reciente.

Es un hecho histórico: en la ciencia occidental las leyes de la naturaleza se escriben en términos matemáticos. El desarrollo de la física teórica y el de las matemáticas siempre han ido a la par. Ocurre en la dinámica clásica, la mecánica cuántica, la relatividad, y también en este caso.

El problema de describir la evolución de un sistema di-



8. Trayectorias.

námico sin recurrir a las trayectorias ya se planteó en mecánica cuántica, y el estudio del operador *U* recuerda mucho los problemas fundamentales de esta rama.

Más adelante volveremos sobre la mecánica cuántica. De momento sólo mencionaremos que su magnitud fundamental es la función de onda $\Psi(x,t)$ que obedece a la ecuación de Schrödinger. Es una ecuación de forma $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$, según la cual la variación temporal de la función de onda Ψ es igual al efecto del operador *H* sobre Ψ (en esta obra, hemos elegido unidades como la constante de Planck $h = 1$). El operador *H* se reduce en el caso clásico a la función «hamiltoniana», es decir, a la energía del sistema expresada en términos de variables mecánicas coor-

denadas y cantidades de movimiento. Entonces recibe el nombre de «operador hamiltoniano» (actúa sobre Ψ; más adelante volveremos a hablar de la ecuación de la mecánica cuántica). Gracias a esta ecuación podemos obtener el valor de la amplitud Ψ en función de t en el instante t_0. La solución de la ecuación es:

$$\Psi(t) = e^{-iH(t-t_0)}\Psi(t_0) = U(t - t_0)\Psi(t_0)$$

U es aquí el operador de evolución de la mecánica cuántica. Es evidente la analogía con el operador de Perron-Frobenius.

Pero también hay diferencias: la función de onda no representa una probabilidad, sino una «amplitud de probabilidad». La probabilidad de encontrar un sistema en el punto en el instante t es proporcional a $\Psi(x,t)\Psi^{cc}(x,t)$. También hablaremos de ello. De todos modos es natural que tratemos de trasladar los métodos que han servido para analizar la evolución de la amplitud Ψ en el ámbito de la mecánica cuántica a los sistemas caóticos como el desplazamiento de Bernoulli. Pero aparecen nuevos problemas, porque en el caso de la mecánica cuántica la evolución es sobre todo periódica. Si sustituimos H por un número ordinario, vemos que el operador de evolución U, en la fórmula anterior, pasa a ser una exponencial oscilante. En el caso de los sistemas caóticos el problema es distinto, porque esperamos encontrar una evolución irreversible. Por consiguiente debemos generalizar el problema de la mecánica cuántica para incluir en el operador de evolución las

propiedades de la evolución temporal del sistema, como el tiempo de Liapunov. Formalmente esto significa sustituir el operador hamiltoniano H por un número real, pero complejo (con una parte real y otra imaginaria). La parte imaginaria describe un comportamiento «amortiguado». En términos técnicos, debemos extender la teoría espectral de valores propios reales (es decir, que asocia a H números reales) a una teoría espectral *compleja* (véase el Apéndice). Esto requiere modificaciones muy profundas, y las investigaciones en este campo son recientes, aunque se basan en los trabajos ya clásicos de grandes matemáticos como Neumann, Gelfand y otros (véase referencias en el Apéndice).

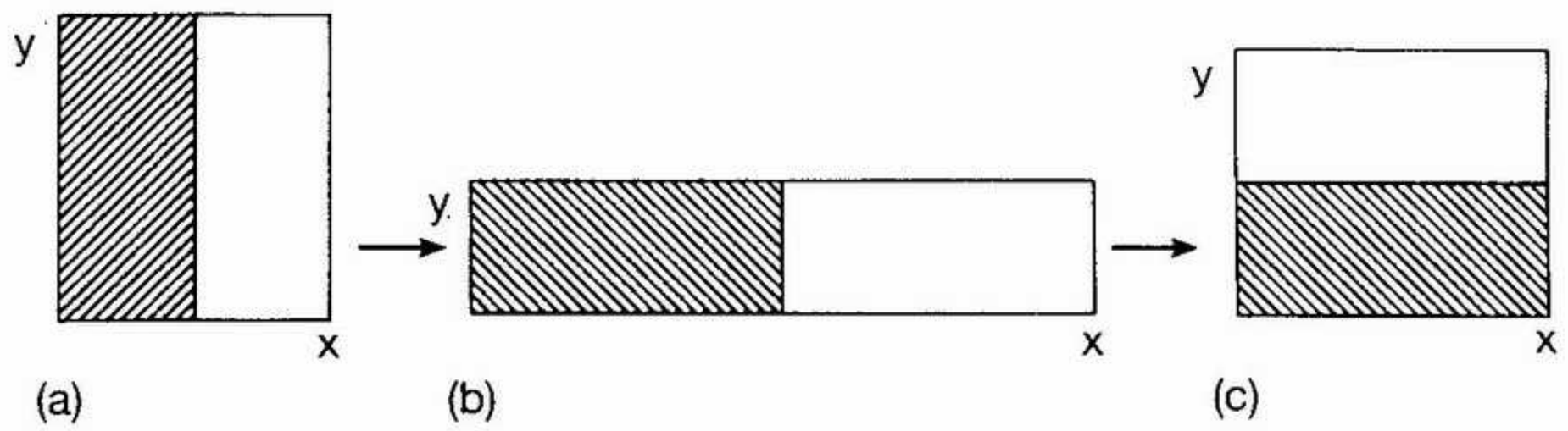
Vamos a hacer aquí una exposición cualitativa simplificada. Para más detalles, véase el Apéndice. El esquema es el siguiente: inestabilidad (tiempo de Liapunov) → probabilidad → irreversibilidad. La inestabilidad, el caos, nos obligan a pasar a un esquema probabilista (abandono de las trayectorias en mecánica clásica, de las funciones de onda en mecánica cuántica), el esquema probabilista nos lleva a estudiar el operador de evolución correspondiente, lo cual nos permitirá aclarar la ruptura de simetría temporal y por consiguiente la irreversibilidad.

El resultado esencial de nuestro estudio es que, para los sistemas inestables, las leyes fundamentales de la dinámica clásica (o cuántica, como veremos más adelante) se formulan en términos de propiedades de la evolución de *probabilidades*. A este nivel podemos aclarar las leyes del caos y describir los cambios que la inestabilidad y el caos introducen en nuestra visión del mundo.

Conviene señalar que el ejemplo que hemos dado, el desplazamiento de Bernoulli, no es realmente un sistema dinámico. Las ecuaciones de los sistemas dinámicos clásicos o cuánticos son reversibles, y en ellas $+ t$ y $- t$ tienen el mismo papel. Pero en este caso no. Si en lugar de considerar el «mapa» $x_{n+1} = 2x_n$ consideramos el «mapa» inverso $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$, al final de las iteraciones llegaremos al punto $x = 0$. De modo que antes de volver al estudio de la evolución de las probabilidades vamos a poner otro ejemplo, que esta vez se refiere a un sistema dinámico. Es la llamada «transformación del panadero».

La transformación del panadero consiste en la siguiente transformación geométrica. Tomamos un cuadrado, lo estiramos en la dirección horizontal para obtener un rectángulo con un factor 2 y luego plegamos la parte derecha sobre la izquierda. La operación se ilustra en la figura. Al repetir esta operación obtenemos una fragmentación cada vez mayor a lo largo de la coordenada vertical (véase la figura 9). En cambio, cuando retrocedemos en el tiempo, obtenemos una fragmentación cada vez más fina a lo largo de la abscisa x y la función de distribución se vuelve uniforme en la coordenada vertical y.

Estamos de nuevo ante un sistema inestable, muy parecido al sistema de Bernoulli. Dos puntos que al principio de las transformaciones estaban muy próximos se separan exponencialmente, y en el futuro estarán en regiones diferentes. De nuevo encontramos la ley exponencial $(\delta r)_n = (\delta r)_0 2^n = (\delta r)_0 e^{n \lg 2}$, donde δr es la distancia entre dos



9. La «transformación del panadero». El cuadrado unidad (*a*) se aplasta formando un rectángulo (*b*). La mitad derecha del rectángulo se sitúa entonces encima de la izquierda, formando un nuevo cuadrado (*c*).

puntos que, como en el ejemplo del panadero, tienen un exponente de Liapunov igual a lg2 (resultado de cada multiplicación por 2 de la dimensión horizontal). La inestabilidad nos obliga a adoptar de nuevo una descripción estadística. Esta vez la función de distribución depende de dos variables *x* e *y*, y tendremos la relación $\rho_{n+1}(x,y) = U\ \rho_n(x,y)$. En este caso el operador de transformación *U* es «unitario», a diferencia del operador de Bernoulli (véase el Apéndice). El hecho de que sea un operador unitario implica que admite un inverso, lo cual no ocurre con el de Bernoulli, que como hemos visto lleva a un atractor en la dirección de los tiempos negativos y a la uniformidad para los tiempos positivos.

¿Qué significa la aproximación al «equilibrio» para la transformación del panadero? Como hemos señalado, cuando el tiempo es un valor alto la partición se fragmenta cada vez más a lo largo de la dirección *y* (véase la figura 9). Si tomamos una magnitud que dependa de manera continua de la coordenada *y*, el valor medio de esta magnitud

ya no será sensible a las variaciones de la función de distribución ρ a lo largo de *y* si dichas variaciones no son lo bastante rápidas. Esta magnitud continua que sigue la dirección *y* recibe el nombre de «función test». Para las funciones test todo sucede como si la distribución para tiempos largos fuera homogénea. En efecto, entonces desaparece la distinción entre las regiones sombreadas y las que no lo están de la figura 9. En este sentido, y gracias a las funciones test, podemos hablar de acercamiento al equilibrio (que en este caso corresponde a la distribución uniforme). La introducción de las funciones test puede hacer pensar en una noción que ha sido muy discutida en mecánica estadística y que ya hemos mencionado. Es la noción de «grano grueso», *coarse graining*. Fue introducida por los Ehrenfest[19] para explicar la aparente contradicción entre la reversibilidad dinámica y la irreversibilidad fenomenológica. Como hemos visto, la irreversibilidad no se refiere a una descripción microscópica, sino a una descripción aproximada, de «grano grueso». En esta imagen somos nosotros quienes introducimos el «grano grueso», y una vez más la irreversibilidad es el resultado de nuestras aproximaciones. Pero no ocurre así en nuestra aproximación. Tal como acabamos de ver, las funciones test que debemos introducir y que concretan el sentido en el que debemos entender la aproximación al equilibrio, son el resultado de la descripción matemática de este proceso, y no contienen ningún elemento subjetivo o arbitrario.

Pasemos ahora al estudio del operador de evolución *U*, el operador de Perron-Frobenius para el desplazamiento de Bernoulli.

Ya hemos visto cuál es la expresión explícita del operador de Perron-Frobenius. Para analizar el efecto de este operador en la distribución de las probabilidades debemos introducir la noción de función propia y valor propio. En general, un operador corresponde a una prescripción matemática que transforma una función en otra. En el capítulo anterior hemos visto que

$$\rho_n(x) = x,\ \rho_{n+1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}.$$

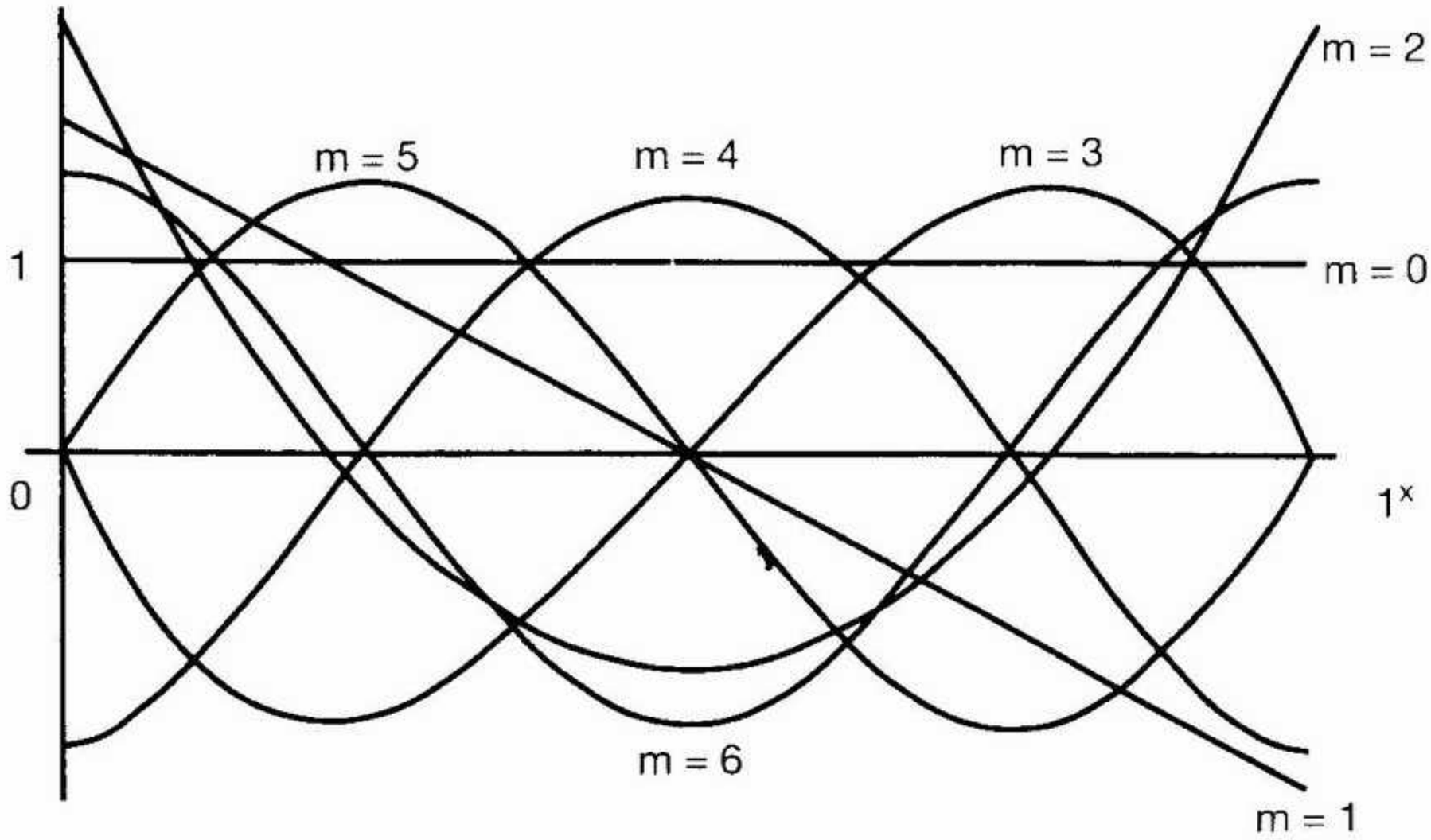
En otros términos: $Ux = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$. Pero hay funciones que permanecen invariables cuando se aplica el operador *U*. Por definición, se trata de funciones propias. Así, cuando $\rho_n(x) = \alpha$, tenemos también $\rho_{n+1}(x) = \alpha$, o $U\alpha = \alpha$; luego α es una función propia (en este caso es una constante). En general una función propia es multiplicada por un número por aplicación del operador *U*. Así, para

$$\rho_n(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

tenemos

$$U\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2^2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Es una función propia correspondiente al valor propio $\frac{1}{2^2}$. La distribución $x^2 - x + \frac{1}{6}$ conserva, pues, una forma invariable en el momento del desplazamiento de Bernoulli, pero es multiplicada por $\frac{1}{4}$. Si repetimos el desplazamiento n veces, el factor de extinción es $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Una contribución a la probabilidad que tenía la forma $x^2 - x + \frac{1}{6}$ tiende, pues, rápidamente a cero. Nótese que los valores propios están relacionados con el tiempo de Liapunov lg2. Mientras desde el punto de vista de las trayectorias el tiempo de Liapunov es un elemento de *inestabilidad*, se convierte en un elemento de estabilidad desde el punto de vista de las funciones de probabilidades. Cuanto mayor es el tiempo de Liapunov, más rápida es la extinción y la aproximación a la uniformidad. La fórmula que habíamos dado antes, $x^2 - x + \frac{1}{6}$, es un caso particular. Las funciones propias de U son polinomios $B_n(x)$, llamados polinomios de



10. Polinomios de Bernoulli.

Bernoulli (a $B_n(x)$ le corresponde un polinomio de grado n), y tenemos $UB_n(x) = \frac{1}{2^n} B_n(x)$, de modo que la amortiguación es tanto más rápida cuanto más elevado sea el grado del polinomio. Si descomponemos $\rho(x)$ en una suma de polinomios de Bernoulli, los polinomios de grado elevado serán los primeros en desaparecer, hasta que sólo quede una distribución uniforme.

En los problemas habituales de mecánica cuántica, cuando tenemos las funciones propias del operador *U*, el problema de la evolución temporal está resuelto. En este caso la situación es más complicada: tratamos de obtener una teoría espectral *compleja* en la que los valores propios tengan una extensión real y una extensión imaginaria. Para eso hay que ampliar el formalismo matemático utilizado en mecánica cuántica, y concretamente introducir dos con-

juntos de magnitudes $B_n(x)$ y $\tilde{B}_n(x)$. Además, las funciones $\tilde{B}_n(x)$ no son funciones «normales», sino funciones singulares (véase el Apéndice).

Es importante que el lector se haga una idea de estas funciones singulares, también llamadas «distribuciones». Ya he mencionado la función singular más sencilla: la función δ. Hemos visto que $\delta(x - x_0)$ sólo es distinta de cero para $x = x_0$, pero nula para cualquier otro valor de x. Hay que utilizar estas funciones singulares en combinación con funciones continuas, que son «funciones test». Por lo general carece de sentido hablar de un producto de distribuciones, pero en cambio la expresión

$$\int dx f(x)\delta(x - x_0)$$

con la función test $f(x)$ tiene un sentido bien preciso, $f(x_0)$.

El siguiente párrafo requiere un conocimiento un poco más profundo de matemáticas, y el lector que no esté preparado puede saltarlo, porque lo resumiré a continuación. Indiquemos ahora los resultados esenciales de nuestro estudio. Podemos desarrollar la probabilidad $\rho(x)$ en polinomios de Bernoulli $B_n(x)$, lo que nos lleva a la fórmula:

$$\rho(x) = \sum_n B_n(x) \int dx' \tilde{B}_n(x')\rho(x')$$

en la que aparecen a la vez las magnitudes $B_n(x)$ y las funciones singulares $\tilde{B}_n(x)$. La aplicación del operador de Perron-Frobenius nos da entonces

$$U\rho(x) = \Sigma \frac{1}{2^n} B_n(x) \int dx' \tilde{B}_n(x')\rho\ (x')$$

porque $B_n(x)$, como hemos visto, es una función propia de U correspondiente al valor propio $\frac{1}{2^n}$. Si escribo estas fórmulas es porque nos aportan algo esencial. En ellas aparecen las integrales

$$\int dx' \tilde{B}_n(x')\rho\ (x')$$

que comportan la función singular $\tilde{B}_n(x')$.

Por eso no podemos aplicar estas fórmulas a una sola trayectoria, ya que entonces tendríamos bajo el signo integral un producto de dos funciones singulares. Pero como acabamos de ver, una función singular sólo tiene sentido bajo una integral si está asociada a una función continua.

Resumamos nuestros resultados. En el caso de sistemas caóticos clásicos podemos sustituir el estudio de las trayectorias por el del operador de evolución U gracias al empleo de métodos que generalizan los utilizados en mecánica cuántica. Pero la novedad consiste en que esta descripción sólo se explica con funciones de distribución continuas (funciones test). Esto significa que *las trayectorias son eliminadas de la descripción probabilista*. Ya hemos señalado que en el caso de los sistemas caóticos, las trayectorias eran «incomputables», pero se podía pensar que se trataba de una dificultad de cálculo sin fundamento teórico. Ahora vemos que lo cierto es lo contrario. La des-

cripción probabilista no es compatible con la descripción en términos de trayectoria. De hecho encontramos una forma de *complementariedad*: o bien describimos la dinámica en términos de trayectorias, o bien utilizamos una descripción probabilista que nos da la evolución del sistema hacia el equilibrio. Pero no podemos aplicar esta descripción a trayectorias, porque tenemos que utilizar funciones *continuas*, y es en este sentido como el sistema se acerca al equilibrio. La descripción estadística es «irreductible».

La flecha del tiempo aparece al nivel de las funciones de distribución continuas. ¿Es una limitación de nuestro método? Creo que es justamente lo contrario. La existencia de una flecha tan evidente a escala macroscópica señala que la descripción microscópica tiene que estar de acuerdo con esta flecha del tiempo. Por consiguiente, tenemos que eliminar la noción de trayectoria de nuestra descripción microscópica. Por otra parte, esto corresponde a una descripción realista: ninguna medida, ningún cálculo, llevan estrictamente a un punto, a la consideración de una sola trayectoria. Siempre estaremos frente a *conjuntos* de trayectorias. En los sistemas estables no hay diferencia. Porque en un sistema estable podemos utilizar la descripción en términos de trayectorias. También podemos usar una descripción probabilista, pero ésta se reduce a un caso particular de la descripción en términos de trayectorias. La descripción estadística es reductible. En cambio, para los sistemas caóticos, la descripción estadística es la única que incluye la aproximación al equilibrio. De este modo hemos formulado de nuevo el problema del caos. El caos no im-

pide una descripción cuantitativa, pero requiere una formulación nueva de la dinámica al nivel de los operadores de evolución, es una descripción a la vez probabilista y realista. El *leitmotiv* de toda nuestra argumentación es que la nueva formulación de la dinámica para los sistemas caóticos se tiene que hacer a nivel probabilista. Esta formulación implica el estudio de las funciones propias y de los valores propios del operador de evolución.

Pasemos ahora a una breve discusión de la transformación del panadero. Como hemos visto, se trata de un sistema dinámico propiamente dicho, en el que el operador U es unitario. Desde este punto de vista, el sistema se parece a los sistemas estudiados por la mecánica clásica o cuántica.

Los valores propios están unidos al tiempo de Liapunov. Para unos tiempos lo bastante largos el sistema se acerca a la uniformidad. De nuevo encontramos las tres etapas antes mencionadas: inestabilidad → probabilidad → irreversibilidad. Ahora entendemos mejor el sentido de la irreversibilidad, que sólo aparece para distribuciones de probabilidades «regulares».

Insistimos en el hecho de que la necesidad de excluir las distribuciones singulares como las trayectorias no se debe a una decisión arbitraria, sino que procede de la estructura del operador de evolución U.

Por lo tanto, para la representación espectral de los operadores unitarios podemos utilizar teoremas de existencia muy potentes, elaborados a lo largo de este siglo. En condiciones muy amplias existe una representación espectral

con valores propios *reales*. Pero lo más relevante es que, además, existe una representación espectral compleja del mismo tipo que la que hemos discutido a propósito del desplazamiento de Bernoulli, que contiene explícitamente los tiempos de Liapunov.

Esta representación implica de nuevo el acercamiento al equilibrio en el futuro ($t > 0$) y también una ruptura temporal de simetría. Pero como en el caso del desplazamiento de Bernoulli, esta representación recurre a funciones singulares, y la teoría sólo se puede aplicar en combinación con funciones test. Llegamos así a una situación nueva, que nunca había aparecido en física teórica. Tenemos más de una representación del operador de evolución. Debemos elegir la «buena». El resultado que hemos descrito para la transformación del panadero es muy general. Así pues, para los sistemas caóticos tenemos la «opción» de elegir entre dos formulaciones: la formulación tradicional en términos de trayectorias o la formulación nueva probabilista en términos del operador de evolución U. No me cabe la menor duda de que hay que elegir la segunda. La representación tradicional es equivalente a una descripción en términos de trayectoria. Pero sabemos que la noción de trayectoria está limitada por el tiempo de Liapunov.

En cambio la nueva representación es más rica, porque nos da el mecanismo de acercamiento al equilibrio en términos de tiempo de Liapunov, e incluye la ruptura temporal de simetría. El descubrimiento de estas nuevas representaciones con simetría rota constituye, a nuestro entender, la solución de la paradoja del tiempo. En efecto,

de esta manera obtenemos una formulación de la dinámica al nivel de las funciones de distribución que incluye la flecha del tiempo. A este nivel, y no al de las trayectorias (o de las funciones de onda, como veremos) se tienen que formular las leyes de la naturaleza. De este modo podemos plantear correctamente los problemas de la ruptura de la simetría temporal. De hecho, creemos que hemos realizado el programa iniciado por Boltzmann hace cien años. Como Boltzmann, hemos ido de la noción de trayectoria a la de probabilidad, pero estamos en una situación más favorable que Boltzmann, porque disponemos de una teoría más elaborada de los sistemas caóticos, y podemos demostrar que el estudio de estos sistemas permite, efectivamente, incorporar el segundo principio de termodinámica.

Para nosotros la inestabilidad, el caos, son el punto de partida para una nueva formulación de la dinámica, incorporando probabilidades e inestabilidades. La irreversibilidad, lejos de estar vinculada a unas aproximaciones introducidas por nosotros («grano grueso»), aparece como la manifestación de una propiedad fundamental, la inestabilidad presente a escala microscópica dinámica. Como hemos señalado en otros trabajos, la irreversibilidad requiere una extensión de la dinámica y, por lo tanto, de la noción de «leyes de la naturaleza».

Hasta ahora hemos puesto unos ejemplos muy simples, casi caricaturescos. Veamos ahora unas situaciones más realistas, para demostrar que la inestabilidad, el caos, son la situación normal en el ámbito de los problemas que aborda la física contemporánea.

5

Como acabamos de ver, hasta ahora hemos considerado sistemas caóticos muy sencillos, como el desplazamiento de Bernoulli o la transformación del panadero. En ellos el tiempo entra de forma discontinua. Ahora abordaremos los sistemas inestables en los que el tiempo entra de manera *continua*. Es la situación de la dinámica clásica o cuántica. ¿Cómo se define el caos para estos sistemas? La definición del caos para los sistemas cuánticos, en particular, ha provocado numerosas controversias.

Hemos visto que en el caso de los «mapas» la definición habitual del caos nos lleva a unas representaciones estadísticas *irreducibles* (no podemos volver a la descripción en trayectorias). Tomaremos esta propiedad *como la definición misma de caos*. Su gran ventaja es que se extiende a los sistemas cuánticos. Son caóticos los sistemas cuánticos cuya evolución no puede expresarse en términos de funciones de onda que obedecen a la ecuación de Schrödinger, sino que requieren una definición nueva en términos de probabilidades. Más adelante veremos unos ejemplos.

En física nos ocupamos esencialmente de los sistemas hamiltonianos, que en particular están en la base de la di-

námica cuántica. Recordemos que las variables que caracterizan a un sistema dinámico clásico son las coordenadas y las velocidades correspondientes. Con la ayuda de las velocidades y las coordenadas podemos expresar la energía del sistema, que generalmente es energía cinética más energía potencial. Para pasar a la representación hamiltoniana, se pasa de las velocidades a las cantidades de movimiento o «momentos». La energía expresada en términos de momentos y coordenadas es por definición la hamiltoniana. Las variables, cantidades de movimiento p y coordenadas q son las variables «canónicas». La importancia fundamental de la descripción hamiltoniana es que las ecuaciones del movimiento adquieren en ella una forma muy simple. Un caso particular muy importante es el caso en que el hamiltoniano sólo depende de los momentos. Entonces la integración de las ecuaciones del movimiento es inmediata, porque las cantidades de movimiento son constantes, mientras que las coordenadas correspondientes varían linealmente con el tiempo. Cuando el hamiltoniano toma esta forma, las cantidades de movimiento se llaman «acciones» J, y las coordenadas correspondientes son los ángulos α. La variación de los ángulos con el tiempo está determinada por las frecuencias ω definidas por $\omega = \frac{\partial H}{\partial J}$.

Hay tantas frecuencias como grados de libertad (por ejemplo, 3 para un punto que se mueve en el espacio de tres dimensiones).

A finales del siglo pasado Poincaré se planteó un problema de suma importancia.[20] ¿Se pueden eliminar las in-

teracciones? Precisemos el problema. Supongamos que partimos de una hamiltoniana «no perturbada» $H_0(J)$ que sólo depende de las acciones *J*. Añadamos una perturbación *V* que depende de las acciones *J* y de los ángulos α. En total, pues, tenemos una hamiltoniana de la forma $H = H_0 + \lambda V$, donde λ es un parámetro que mide la intensidad del acoplamiento (para $\lambda = 0$ volvemos a encontrar el sistema no perturbado H_0). A través de un proceso sistemático podemos eliminar el término de interacción y escribir el hamiltoniano como una función sólo de acciones. Es el problema central del cálculo de «perturbaciones». Buscamos nuevas acciones *J'* que para $\lambda \to 0$ se reducen a *J* (además se supone que *J'* puede desarrollarse en potencias de λ). Poincaré contestó negativamente a esta pregunta. No sólo demostró que en general era imposible, sino que dio la razón por la que era imposible. Esta razón es la aparición de resonancias entre las frecuencias ω del sistema dinámico.

Cualquier niño que se haya columpiado sabe lo que es una resonancia. Es una relación lineal entre unas frecuencias $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0$, donde n_1, n_2 son números enteros. Estas resonancias entran en el cálculo de las perturbaciones y llevan a «infinitos», a divergencias.

En cierto modo es una suerte que Poincaré haya demostrado la imposibilidad de eliminar las interacciones. Si se pudieran eliminar, el universo sería isomorfo a un universo de partículas libres, y todo sería tan «incoherente» que no habría química, ni biología, ni por supuesto culturas humanas.

Durante mucho tiempo el resultado negativo de Poincaré se ha considerado más bien como una curiosidad. En realidad, se trataba de un resultado fundamental, porque así Poincaré había establecido una diferencia esencial entre los sistemas para los que se podía eliminar la interacción, a los que llamaba sistemas «integrables», y sistemas para los que esta eliminación era imposible (por lo menos para un cálculo de perturbaciones), a los que llamaba «no integrables». Pero fue con la formulación de la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser)[21] en los años cincuenta cuando se empezó a entender la importancia extraordinaria del resultado de Poincaré. A esta teoría hacía alusión Lighthill cuando hablaba de la renovación de la dinámica clásica y de la necesidad de abandonar el determinismo en la descripción clásica. En efecto, uno de los principales resultados de KAM fue demostrar que a causa de las resonancias aparecen dos tipos de trayectorias: unas trayectorias regulares deterministas, pero también unas trayectorias irregulares «imprevisibles», que son resultado de las resonancias. No podemos entrar aquí en la descripción de estos resultados, que se describen en numerosas obras. Por otra parte hay que decir que la teoría KAM hace una clasificación de las trayectorias pero no resuelve el problema de la integración de los sistemas «no integrables» de Poincaré. No obstante, la teoría KAM demuestra que cuando se eleva la energía del sistema el número de trayectorias aleatorias aumenta, y finalmente el sistema se vuelve caótico, con exponentes positivos de Liapunov. Entonces presenta un comportamiento cualitativamente parecido al que he-

mos descrito en el caso del desplazamiento de Bernoulli y del panadero.

La integración de los sistemas canónicos en el caso general es un problema sin resolver, pero en un caso particular podemos ir más lejos. Es el caso de los grandes sistemas de Poincaré (LPS: *large Poincaré's systems*) en los que *las resonancias se manifiestan en casi todas las trayectorias*.[22] (La característica matemática precisa de los LPS se sale del tema de estas conferencias, son sistemas de espectro continuo; véase el Apéndice.)

La mayoría de los sistemas que se estudian actualmente en física se incluyen en esta categoría, concretamente los campos en interacción, o los problemas de la mecánica estadística, en los que hay un elevado número de N partículas en interacción en un volumen V y se hace que este volumen tienda al infinito manteniendo constante la relación N/V.

El teorema de Poincaré revela una situación muy poco satisfactoria. Demuestra que el problema de la integrabilidad de las ecuaciones de la dinámica está sin resolver. Salvo en casos muy particulares, no sabemos integrar las ecuaciones de la mecánica clásica (o cuántica). Y lo que es peor, ni siquiera tenemos un método para saber si un problema mecánico dado es integrable o no.

La clasificación de Poincaré se ha discutido muchas veces en el pasado, pero siempre en relación con la mecánica clásica. Por lo demás, el problema de las resonancias y las divergencias que se deduce de ella era conocido por los fundadores de la mecánica, como Lagrange y Laplace. Ya sa-

bían que en nuestro sistema planetario había resonancias que llevaban a divergencias. Poincaré consideraba el problema de estas resonancias como el problema *fundamental* de la mecánica clásica.

Como hemos dicho, el problema de estas resonancias siempre se ha considerado como una dificultad, como algo que nos impide integrar las ecuaciones de la mecánica. Aquí, por el contrario, vamos a dar un sentido constructivo a estas divergencias, demostrando que las podemos eliminar y hacer que el problema sea «convergente». El hecho notable es que así obtenemos una solución a las ecuaciones de la dinámica que resuelve también el problema de la irreversibilidad. Integrabilidad e irreversibilidad son problemas estrechamente relacionados. De este modo demostramos que las resonancias de Poincaré tienen un sentido físico muy profundo. Las divergencias se deben a lo que esperamos de las soluciones que corresponden al ideal de la física clásica, o sea, de las soluciones que son simétricas en la dirección del tiempo. Las divergencias de Poincaré marcan de alguna manera la barrera entre sistemas dinámicos reversibles y sistemas disipativos de simetría temporal rota. Eliminar las divergencias de Poincaré es un paso esencial en la resolución de la paradoja del tiempo.

6

Como ya se ha dicho, las divergencias de Poincaré se discutieron en el marco de la mecánica clásica. Ahora, en cambio, vamos a centrarnos en el caso cuántico. En efecto, en mecánica cuántica es donde la eliminación de las divergencias de Poincaré tiene más importancia. Como veremos, esta eliminación nos permite suprimir las dificultades fundamentales que subsisten en los fundamentos de la mecánica cuántica.

En efecto, la mecánica cuántica es una ciencia curiosa: es la que más éxito ha tenido por sus previsiones experimentales, pero desde hace 60 años no se ha dejado de discutir acerca de sus fundamentos. En su libro *El carácter de la ley física*, R. Feynman[23] dice que «nadie entiende la mecánica cuántica». Citaremos también un reciente texto de Paul Davies[24] que plantea bien el problema:

> En la base de todo está el hecho de que la mecánica cuántica proporciona un procedimiento muy eficaz para predecir los resultados de las observaciones de sistemas microscópicos, pero cuando nos preguntamos qué sucede realmente cuando tiene lugar una observación, lo que se obtiene care-

ce de sentido. Los intentos de salir de esta paradoja van de lo extravagante, como la interpretación de los universos múltiples de Hugh Everett, a las ideas místicas de John von Neumann y Eugene Wigner, que apelan a la conciencia del observador. Después de medio siglo de discusión, el debate sobre la observación cuántica está más vivo que nunca. Los problemas de la física de lo muy pequeño y lo muy grande son formidables, pero quizá esta frontera de la relación entre mente y materia sea el mayor desafío de la Nueva Física.

Este problema de la interacción del hombre con la naturaleza, «la interfase entre mente y materia» según la expresión literal de Paul Davies, está estrechamente relacionado con el problema de las resonancias de Poincaré. Por lo tanto, antes de discutir y presentar su teoría en el marco cuántico de eliminación de las divergencias de Poincaré, para situar estas dificultades empezaremos por hacer una breve exposición de las bases de la mecánica cuántica.

Recordemos algunos elementos de la mecánica cuántica. El objeto principal de la mecánica cuántica es el estudio de la amplitud de la función de onda Ψ, que obedece a la ecuación de Schrödinger. Ya hemos visto cuál es la ecuación de Schrödinger. Esta ecuación describe la evolución de Ψ en el tiempo. En esta ecuación aparece el operador hamiltoniano H estrechamente vinculado a la función hamiltoniana clásica que hemos definido antes. En mecánica cuántica se habla de operador hamiltoniano, en vez de función hamiltoniana. La introducción de los operadores es quizá el elemento más revolucionario de la mecánica

cuántica. Como hemos visto, es una prescripción matemática que debe ser utilizada para transformar una función en otra. Puede ser una simple multiplicación, o una derivada primera o segunda, o cualquier otra operación matemática. Por supuesto, esto no es todo. Lo que caracteriza a un operador es también el espacio en el que actúa. Tendremos ocasión de volver brevemente sobre el tema (véase también el Apéndice).

También hemos visto que un operador se caracteriza por sus funciones propias (las funciones que deja invariables) y sus valores propios. Eso da la «representación espectral» del operador.

La introducción de los operadores en física coincide esencialmente con la aparición de la mecánica cuántica. Hay en ello una razón muy profunda, relacionada con el propio descubrimiento de la cuantificación. Los niveles de energía de un oscilador o de un rotor forman un conjunto discreto de valores. Ahora bien, el hamiltoniano clásico es una función continua de las cantidades de movimiento y de las coordenadas. La idea fundamental para salir de este dilema es reemplazar la función hamiltoniana por un operador, y asociar los valores propios del operador a los distintos niveles observados. Esta idea ha sido coronada con un éxito total. Pero el uso de los operadores se ha extendido hoy a otros ámbitos. Hemos estudiado el operador de Perron-Frobenius para el desplazamiento de Bernoulli. Más adelante estudiaremos unos operadores asociados a la descripción estadística clásica o cuántica.

Volvamos a la ecuación de Schrödinger. Cuando tene-

mos las funciones propias $u_n(x)$ del operador hamiltoniano H, podemos desarrollar la función de onda en estas funciones propias. La solución formal de la ecuación de Schrödinger se escribe:

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t} u_n(x)$$

La amplitud $\Psi(x,t)$ corresponde a una superposición de las rotaciones de las funciones propias $u_n(x)$ a lo largo del tiempo. ¿Cuál es el significado físico de los coeficientes c_n que aparecen en esta fórmula para la amplitud Ψ? Un postulado fundamental de la mecánica cuántica es que los c_n corresponden a *amplitudes de probabilidad*. Precisando más, supongamos que hacemos una medición de la energía del sistema que está descrito por la función de onda Ψ. La interpretación de la mecánica cuántica es que vamos a obtener unas funciones propias E_1, E_2, E_3 de la energía, y esto con probabilidades $|c_1|^2$, $|c_2|^2$ y así sucesivamente. Es importante señalar que en el problema de la medición, la función de onda inicial Ψ se transforma en un *conjunto* de funciones de onda. En otras palabras, se pasa de una función de onda única a una «mezcla» correspondiente a un «conjunto», a una superposición de funciones. Ahí está la raíz de las dificultades epistemológicas con que tropieza la mecánica cuántica. Los coeficientes c_n que aparecen en la función de ondas se pueden considerar «potencialidades». Los resultados de las medidas dadas por las probabilidades $|c_1|^2$, $|c_2|^2$ hacen que pasemos de las potencialidades a las actualidades. Pero ¿cómo es posible,

dado que la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la de Schrödinger, lo que hace es transformar una función de onda en otra? En ningún momento hay desdoblamiento de funciones de onda. Al contrario, en la medición tendríamos un desdoblamiento de funciones de onda, o como se suele decir, un «colapso» de la función de onda. La mecánica cuántica tiene así una estructura dual, por un lado la ecuación de Schrödinger, determinista y reversible en el tiempo, y por otro el colapso de la función de onda relacionado con la medición, que introduce una ruptura de simetría temporal, y por ello la irreversibilidad. También en este caso la irreversibilidad se debería al observador. Nosotros seríamos responsables del paso de un mundo de potencialidades a un mundo de actualidades. En cierto modo volvemos una vez más a la idea de que la irreversibilidad es un elemento que el hombre introduce en una naturaleza fundamentalmente reversible. Este problema se plantea con más agudeza en mecánica cuántica que en mecánica clásica.

Independientemente del problema de la irreversibilidad, la necesidad de introducir un «observador» crea dificultades. ¿Hay una naturaleza «no observada», diferente de la naturaleza «observada»? Como se ha indicado a propósito del colapso de la función de onda, obtenemos un conjunto de funciones de onda. Vamos, pues, hacia una descripción probabilista. Esta descripción es necesaria para hablar de equilibrio termodinámico. Efectivamente, en el universo observamos situaciones de equilibrio, como la famosa radiación residual de 3K, testigo del principio del uni-

verso. Pero la idea de que esta radiación es el resultado de mediciones es absurda: ¿quién medía? Por lo tanto, en mecánica cuántica tiene que haber un mecanismo intrínseco que lleve a los aspectos estadísticos observados. Como veremos, este mecanismo es, precisamente, la inestabilidad, el caos.

Volvamos ahora al teorema de Poincaré, esta vez en el terreno cuántico. De nuevo partimos de un hamiltoniano «no perturbado» H_0. Pero en mecánica cuántica se trata de un operador. Supongamos que conocemos las funciones propias u_n^0 y los valores propios E_n^0 del operador. Añadimos una perturbación λV, y tratamos de determinar las funciones propias y los valores propios del hamiltoniano total $H = H_0 + \lambda V$ con un cálculo de perturbación (analítica en λ). Otra vez obtenemos resonancias. En los LPS estas resonancias llevan a divergencias, y no podemos obtener las funciones propias y los valores propios de H, por lo menos con el cálculo de la perturbación. Se han enunciado teoremas que demuestran la existencia de las funciones y valores propios de H, pero no se dispone de métodos constructivos. El problema del «colapso» de las funciones de onda que acabamos de mencionar está estrechamente relacionado con el teorema de Poincaré.

Las divergencias en los LPS revelan que en general estos sistemas son caóticos.[25] Por lo tanto, hay que introducir una formulación nueva de la teoría cuántica, que ya no esté en términos de funciones de onda, sino directamente en términos de probabilidades. Precisando más, llegamos a una descripción probabilista «irreductible» que no nos

permite volver a las funciones de onda. La situación se parece entonces al caso clásico de los «mapas». Tampoco en ese caso podemos volver de la descripción estadística a las trayectorias.

Cuando tengamos una descripción estadística irreductible, el problema del colapso de la función de ondas dejará de existir, porque la teoría estaría en términos de ρ, la probabilidad (y no en términos de amplitud de probabilidad Ψ). Así pues, las dificultades epistemológicas de la mecánica cuántica están estrechamente relacionadas con el problema del caos. Es lo que a continuación vamos a analizar de forma más detallada.

El principal problema que debemos resolver es la eliminación de las divergencias de Poincaré. Para eso nos ocuparemos de nuevo de la descripción estadística. Esta descripción jugó un papel importante en la historia de la física, ya que es la base de la mecánica estadística. Gibbs y Einstein extendieron el estudio de un sistema dinámico único, considerando la posibilidad de un conjunto de sistemas correspondientes al mismo hamiltoniano, que siguieran, por tanto, las mismas leyes dinámicas. Para Gibbs y Einstein, el punto de vista de los conjuntos no era más que una manera cómoda de calcular valores medios, pero para nosotros el punto de vista de los conjuntos es fundamental cuando se pasa al estudio de los sistemas inestables. Como en el pasado, la descripción se centra en la función de distribución ρ. En el caso clásico esta función depende de las variables canónicas, coordenadas y cantidades de movimiento. En el caso cuántico Ψ es una amplitud de probabilidad. Por definición, tenemos $\rho = \Psi\Psi^{cc}$, donde Ψ^{cc} es el complejo conjugado de la función de onda Ψ. La probabilidad propiamente dicha ρ es el cuadrado (del módulo) de la amplitud de probabili-

dad Ψ. Se pueden considerar casos más generales, en los que la cantidad ρ está relacionada con una superposición de funciones de onda, pero no nos va a hacer falta esta generalización.

La función de distribución ρ clásica o cuántica obedece a una ecuación de evolución que aparece en todos los libros de mecánica estadística, la ecuación de Liouville-von Neumann.[26] Formalmente se escribe:

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = Lp$$

L es un operador cuya forma exacta no será esencial en este caso (está relacionado con los «paréntesis de Poisson» en mecánica clásica, y con el conmutador con ρ en mecánica cuántica). La solución formal de la ecuación de Liouville es $\rho(t) = e^{-iLt}\,\rho(0) = U_t\rho(0)$, donde U_t es otro operador unitario. El problema central, como antes, es la búsqueda de una representación espectral de U_t que ponga en evidencia la ruptura de la simetría temporal.

La ecuación de Liouville presenta, pues, una gran analogía con la de Schrödinger. La diferencia es que esta última se aplica a la amplitud Ψ, y la ecuación de Liouville a ρ. Cuando tenemos la ecuación de Liouville podemos escribir formalmente la solución en términos del operador de evolución U_t. Pero para hacer explícita esta solución, una vez más debemos determinar las funciones propias y los valores propios que tiene la ecuación. Tratándose de sistemas de Poincaré, volvemos a tropezar con el proble-

ma de las divergencias relacionadas con las resonancias.

Volvamos al problema del panadero. Como hemos visto, hay una diferencia entre el futuro ($t \rightarrow +\infty$) y el pasado ($t \rightarrow -\infty$). En el futuro la ordenada y es la que se fragmenta cada vez más (véase la figura 2), mientras que en el pasado lo hace la coordenada x. Así pues, podemos dar un sentido físico a la flecha del tiempo. Lo mismo sucede con los LPS. Tomemos un átomo en un estado excitado: en el futuro esperamos encontrarlo (si no hay ningún efecto perturbador) en el estado fundamental con emisión de fotones. En los estados cuánticos hay un orden natural, pero en general no podemos especificar la secuencia natural en términos de estados cuánticos. En cambio podemos hacerlo utilizando una descripción estadística.

Veamos un ejemplo: un gas cuyas moléculas interaccionan. Supongamos que dos moléculas inicialmente independientes chocan. De esta manera creamos una correlación entre las dos partículas. A su vez, las dos partículas chocan con una tercera, lo que da lugar a la creación de una correlación ternaria. El número de partículas implicadas en las correlaciones aumenta continuamente. La existencia de estas correlaciones que siguen a las colisiones se puede poner en evidencia por ordenador. Si invertimos las velocidades, unas partículas que se separaban vuelven a chocar entre sí. De este modo las correlaciones conservan, por así decirlo, la memoria del pasado.

Un sistema formado por un número elevado de partículas, como un gas o un líquido, está recorrido por este flujo de correlaciones. Incluso se puede considerar que es

la forma de envejecer que tiene el sistema. Las correlaciones engloban cada vez más partículas. Es como cuando dos amigos se encuentran y mantienen una conversación, luego uno de ellos puede marcharse a una ciudad y el otro a otra, pero queda la memoria de su encuentro. A su vez, se encuentran con otras personas, y la información contenida en la conversación inicial se propaga en los encuentros sucesivos. Aparece entonces un segundo tiempo que no está relacionado con las moléculas individuales, ni con las personas individuales en el ejemplo que acabo de poner, sino con las relaciones entre las moléculas o entre las personas. La idea, pues, es introducir una sucesión temporal relacionada con este flujo de correlaciones. Ahora podemos introducir este flujo de correlaciones en la solución de la ecuación de Liouville-von Neumann.

Esta ecuación describe precisamente unas transformaciones de una a otra correlación. Si el sistema fuera integrable, se podrían eliminar las interacciones, y en consecuencia suprimir el flujo de correlaciones. Pero en los LPS el flujo de correlaciones es «irreductible». La esencia de nuestro método es la idea de tratar las transiciones de un modo distinto según se trate de un paso a correlaciones más elevadas (orientadas hacia el «futuro») o más débiles (orientadas hacia el «pasado»). Técnicamente esto se hace añadiendo partes imaginarias de signos distintos al denominador que contiene resonancias (véase el Apéndice). Cuando este flujo de correlaciones se introduce en las ecuaciones matemáticas que describen la solución de la ecuación de Liouville, las divergencias de Poincaré desaparecen.

Creo que la idea de un tiempo vinculado al nivel estadístico, y más concretamente a la evolución de las correlaciones, tiene un claro alcance intuitivo. Cuando comparamos dos sociedades humanas (como la sociedad del neolítico con la sociedad actual), no es que los hombres, tomados individualmente, sean distintos, más o menos inteligentes, sino que las relaciones entre individuos han experimentado un cambio radical. No cabe ninguna duda, también, de que nuestra sociedad envejece más deprisa que la neolítica, porque los medios de comunicación se han amplificado, y por lo tanto la dinámica de las correlaciones sociales ha experimentado una enorme aceleración.

El resultado obtenido es la posibilidad de descomponer el operador de evolución U_t correspondiente a la ecuación de Liouville en una superposición de modos que varían de forma independiente y corresponden a valores propios *complejos*. El hecho de que estos valores propios sean complejos corresponde a la existencia de amortiguaciones. Son éstas las que llevan la función de distribución al equilibrio para tiempos lo bastante largos. Ciertamente, en general, el acercamiento al equilibrio es muy complejo y comprende distintas escalas temporales. Nuestra aproximación da una solución exacta a este problema al separar las distintas escalas temporales.

El principal resultado de esta aproximación es una representación espectral de la operación de evolución U de los LPS al nivel de la *función de distribución* ρ. Esta representación es análoga a la que hemos discutido a pro-

pósito del desplazamiento de Bernoulli. Ella también presenta una simetría temporal rota.

Mientras la solución de la ecuación de Schrödinger tropieza con dificultades a causa de las divergencias de Poincaré, no sucede lo mismo con la ecuación de Liouville. En el nivel de las probabilidades, podemos eliminar las divergencias de Poincaré y poner en evidencia las rupturas de simetría temporal.

Como en el problema del panadero, existen siempre representaciones del operador de evolución que son simétricas en el tiempo. Es la consecuencia de teoremas muy generales (véase el Apéndice). Pero *además*, en los LPS, tenemos una representación que incluye los fenómenos irreversibles, que nos da la base microscópica de los fenómenos *inestables* observados a todos los niveles de descripción de la física. Además esta nueva representación es *constructiva*, pues se basa en la eliminación de las divergencias de Poincaré.

Parece conveniente hacer alguna observación sobre la aparición de disipación a nivel de las ecuaciones de la dinámica. La ecuación de Schrödinger o la de Liouville son simétricas con respecto a la inversión del tiempo. Pero una vez eliminadas las divergencias de Poincaré, obtenemos soluciones de estas ecuaciones que presentan una simetría temporal rota. En este caso se produce un fenómeno muy similar al que aparece en física en los problemas de magnetismo, y que se ha asociado a las «rupturas espontáneas» de la simetría. A elevada temperatura, un sistema magnético es paramagnético: los pequeños imanes individuales

se orientan al azar. En cambio, a baja temperatura tenemos ferromagnetos: todos los imanes se alinean en una dirección. En este momento, pues, tenemos soluciones con menor simetría en relación con las ecuaciones iniciales. Por lo demás, esta es una propiedad muy general. En la física cuántica moderna las partículas y las antipartículas tienen el mismo papel, pero nuestro universo está formado esencialmente por partículas, mientras que hoy las antipartículas tienen un papel despreciable a nivel cosmológico. Sin embargo el universo es menos simétrico de lo que dan a entender la ecuaciones básicas.

¿Cuál es ahora la expresión de las leyes fundamentales de la naturaleza? Tradicionalmente se formulan a nivel de las trayectorias (ecuaciones de Newton o de Hamilton) o de las funciones de onda. Nosotros las formulamos ahora al nivel de la evolución de la probabilidad ρ. Recordemos una vez más nuestro esquema conceptual:

inestabilidad (caos) → probabilidad → irreversibilidad,

al que damos así una realización concreta. En vez de ser nociones fundamentales, las nociones de trayectoria o de función de onda se vuelven casos particulares válidos para los sistemas estables.

El futuro es incierto, más incierto aún de lo que hacía presagiar la mecánica cuántica tradicional con las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

Con los resultados que hemos resumido en las secciones anteriores, podemos volver a los problemas epistemológicos, y concretamente a esa dualidad de la mecánica cuántica que ha sido objeto de discusiones apasionadas desde la misma formulación de la mecánica cuántica, hace más de sesenta años.

El problema de la medición es quizá el que ilustra con más claridad las dificultades de la mecánica cuántica en su formulación tradicional. Citemos un extracto de la relación que presentó Niels Bohr en 1961, en el que se hace un resumen de las discusiones que hubo en el Consejo Solvay de 1927:

> Para introducir la discusión sobre estos puntos, en la conferencia me pidieron que abordara los problemas de tipo epistemológico con los que tropezamos en física cuántica. Yo aproveché la ocasión para centrar la discusión sobre la cuestión de una terminología apropiada y para subrayar el punto de vista de la complementaridad. Sobre todo sostuve que una explicación unívoca de los experimentos físicos requiere el uso de un lenguaje común, un adecuado refinamiento

del vocabulario propio de la física clásica, tanto en el procedimiento experimental como en la anotación de las observaciones.[27]

Rosenfeld, el más estrecho colaborador de Bohr, añadió un segundo elemento al problema de la medición. Ésta debe ser un proceso *irreversible*. Pero ¿cómo se puede describir de forma clásica un aparato de medida como lo quiere Bohr, si la teoría cuántica se considera universal y se aplica a cualquier objeto, pequeño o grande? Esta es la razón por la que la propuesta de Bohr no tuvo una respuesta unánime. Veamos lo que dice John Bell al respecto:

> El «problema» es: ¿cómo se divide exactamente el mundo entre aparato explicable ..., o sea, del que podemos hablar ... y sistema cuántico inexplicable, del que no podemos hablar? ¿Cuántos electrones, o átomos, o moléculas forman un «aparato»? Las matemáticas de la teoría normal requieren esta separación, pero no se expresan acerca de los modos de actuación. En la práctica, la cuestión se resuelve con recursos pragmáticos que han superado la prueba del tiempo, aplicada con discreción y buen gusto, fruto de una gran experiencia práctica. Pues bien, creo que en realidad los fundadores se equivocaban en este punto...[28]

Nótese que el problema de la medición no se planteaba de esta manera en mecánica clásica, porque se admitía que las leyes de la física se aplicaban por igual a los microsistemas y a los macrosistemas. No se puede decir lo mismo de la mecánica cuántica, pues en ella los microsis-

temas están descritos por las leyes de la mecánica cuántica, mientras que a escala macroscópica podemos aplicar las leyes de la dinámica clásica y la termodinámica. De modo que el problema planteado por Bohr es el de la transición de las leyes de la mecánica cuántica a las leyes de la dinámica clásica, que introduce los conceptos con los que formulamos nuestra imagen del mundo.

Hoy podemos entender mejor en qué dirección se puede resolver el problema de Bohr. La transición del mundo cuántico a nuestro mundo dinámico clásico se realiza a través de los sistemas dinámicos inestables, y lo que Bohr llamaba lenguaje común en realidad es «un tiempo común»: sólo gracias al tiempo común podemos comunicarnos con la naturaleza. Cuando hacemos una medición debemos tener una idea del «antes» y el «después», y esta idea tiene que corresponder al desarrollo de los fenómenos que observamos. Esta exigencia es evidente a escala humana. No podríamos comunicarnos con una persona para la cual nuestro futuro sería su pasado y su futuro nuestro pasado. Ahora bien, en los sistemas dinámicos inestables no podemos recurrir al tiempo cuántico tal como se encuentra asociado a la ecuación de Schrödinger, sino que debemos utilizar el tiempo asociado a la evolución de las probabilidades tal como lo describe la solución de Liouville. En este caso la dirección del tiempo resulta finalmente de las divergencias de Poincaré. En otras palabras, un tiempo común al hombre y a la naturaleza se establece a través de las resonancias. Esta es la condición de una posibilidad de comunicarnos con la naturaleza.

La estructura dual de la mecánica cuántica se debía al hecho de que por un lado se tenía la ecuación de Schrödinger, que describe la evolución de las funciones de onda, y por otro se tenía que introducir un segundo proceso vinculado a la medida, por el que una función de onda se transformaba en conjunto estadístico. El paso de las «potencialidades» a las «actualidades» ya no es el efecto del observador, sino de la inestabilidad del sistema. La irreversibilidad, una vez más, no se debe a nuestra intervención en la naturaleza, sino a la formulación de la dinámica extendida a los sistemas dinámicos inestables.

Como hemos señalado, la estructura dual de la mecánica cuántica daba al observador un papel esencial. Era la irrupción de un elemento subjetivista, principal causa de la insatisfacción que siempre expresó Einstein a propósito de la mecánica cuántica. La introducción del observador es particularmente molesta cuando se aborda la cosmología. No cabe duda de que los efectos cuánticos tuvieron un papel esencial en los primeros momentos del universo. El desarrollo de la cosmología cuántica exige, pues, una mecánica cuántica «sin observador». Esta es precisamente la formulación a la que llega nuestro estudio.

Insistimos en el hecho de que el caos cuántico es aún más fundamental que el caos clásico, en el siguiente sentido: en mecánica clásica hemos visto que teníamos dos representaciones del operador de evolución U, la primera equivalente a la descripción en trayectorias, y la segunda irreductible en términos de probabilidades. Hemos insistido en el hecho de que la posibilidad de incluir la flecha

del tiempo es lo que nos lleva a preferir la segunda representación.

En cambio, en mecánica cuántica tenemos ya sea la descripción dual (ecuación de Schrödinger más colapso de la función de onda), ya sea nuestra nueva representación, que no sólo incluye la flecha del tiempo, sino que además permite superar las paradojas cuánticas.

Tratemos de hacernos una idea intuitiva del caos cuántico. ¿Por qué nuestra representación cuántica es irreductible? ¿Por qué no se puede volver de la descripción cuántica en términos de probabilidades ρ a la descripción usual en términos de funciones de onda Ψ?

Para empezar, volvamos a las principales características del caos clásico. El punto de partida habitual es el estudio de las trayectorias y la observación de que, a causa del tiempo de Liapunov y de la divergencia exponencial de las trayectorias que este tiempo implica, tenemos inestabilidad, caos. Es la sensibilidad a las «condiciones iniciales». Nuestro método consiste en ir más allá de esta constatación y pasar a una descripción estadística de la dinámica clásica. Entonces descubrimos, como ya hemos indicado, que las trayectorias no están en el ámbito de la descripción estadística. Así pues, las trayectorias no son eliminadas por razones de dificultad de cálculo (son no computables), sino de principio. En un sistema caótico las trayectorias son excluidas de la descripción probabilista. Nótese también que en la descripción probabilista ya no hay exponenciales crecientes vinculados a la distancia entre trayectorias. Los tiempos de Liapunov determinan las vidas medias

de inhomogeneidad. Esta vida media es tanto más corta cuanto más «compleja» es su estructura (hemos visto que el polinomio de Bernoulli de grado n se amortigua tanto más deprisa cuanto más elevado es el grado n).

¿Cuál es la situación en mecánica cuántica? En mecánica cuántica no hay tiempo de Liapunov. Tampoco hay divergencia exponencial de funciones de onda. Además la función de onda no es una función singular como la trayectoria (ya hemos visto que esta última se representa con una función δ). Nada nos impide tomar una función de onda como condición inicial. ¿Cuál es entonces el mecanismo del colapso de la función de onda? ¿Cuál es la naturaleza del caos cuántico? He aquí una cuestión interesante que hemos estudiado en detalle.[29] Vamos a tratar de explicarla. Ya hemos visto que la distribución ρ está relacionada con el producto $\Psi\Psi^{cc}$, donde Ψ es la función de onda. Las resonancias de Poincaré acompañan a la evolución temporal de Ψ y de Ψ^{cc}. Esto significa que se pueden manifestar resonancias en la solución de la ecuación de Schrödinger, pero otras se manifiestan únicamente al nivel del *producto* $\Psi\Psi^{cc}$, es decir, de la probabilidad ρ. Es el motivo por el que la descripción probabilista se vuelve irreductible. Pero si partimos de una función de onda determinada, debemos tener en cuenta unos efectos de resonancia que sólo se pueden describir a nivel de ρ. En esto consiste el «colapso» de la función de onda: los efectos de resonancia, que dan términos seculares, varían sistemáticamente con el tiempo y llevan al sistema poco a poco al equilibrio.

9

Terminaremos esta exposición con algunas conclusiones generales. En varias ocasiones hemos insistido en la sucesión inestabilidad (caos) → probabilidad → irreversibilidad, y en el hecho de que en ciertos aspectos nuestro enfoque sigue las intuiciones geniales de Boltzmann. Hoy sabemos que el enfoque de Boltzmann se aplica a la categoría de los sistemas dinámicos inestables, y esta precisión permite evitar las críticas de que había sido objeto Boltzmann en su tiempo. En vez de pensar trayectorias o funciones de onda, pensamos probabilidades y propiedades de los operadores de evolución. A través de las probabilidades de los operadores de evolución es como podemos unificar la dinámica y la termodinámica. Empezamos a aprender la lección del segundo principio de la termodinámica. ¿Por qué existe la entropía? Antes se admitía que la entropía sólo era la expresión de una fenomenología, de aproximaciones suplementarias que introducimos en las leyes de la dinámica. Hoy sabemos que la ley de crecimiento de la entropía y la física del no equilibrio nos enseñan algo fundamental sobre la estructura del universo. En nuestra descripción del universo la irreversibilidad pasa a ser un

elemento fundamental. En consecuencia, tiene que encontrar su expresión en las leyes fundamentales de la dinámica. La condición esencial es que la descripción microscópica del universo se haga mediante sistemas dinámicos inestables. Es un cambio radical de punto de vista. El punto de vista clásico era que los sistemas estables eran la regla y los inestables excepciones. Ahora le damos la vuelta a esta perspectiva.

Después que tenemos la irreversibilidad, la flecha del tiempo, podemos estudiar su efecto en otras rupturas de simetría y en la aparición del orden y el desorden a la vez a escala macroscópica. En ambos casos el orden y el desorden emergen a la vez del caos. Si la descripción fundamental se hiciese en términos de leyes dinámicas estables, no tendríamos entropía, pero tampoco coherencia debida al no equilibrio, ni posibilidad de hablar de estructuras biológicas, y por lo tanto tendríamos un universo del que estaría excluido el hombre. La inestabilidad, el caos, tiene, pues, dos funciones esenciales. Por un lado la unificación de las descripciones microscópicas y macroscópicas de la naturaleza. Pero esta unificación sólo es posible con un cambio de la descripción microscópica. Por otro lado, la formulación de una teoría cuántica directamente basada en la noción de probabilidad, que evita el dualismo de la teoría cuántica ortodoxa; pero en un sentido más amplio esto nos lleva a cambiar lo que se conoce por «leyes de la naturaleza». Tradicionalmente, estas leyes estaban asociadas al determinismo y a la reversibilidad del tiempo. En los sistemas inestables las leyes de la naturaleza se tornan

fundamentalmente probabilistas. Expresan lo que es posible, y no lo que es «cierto». Esto resulta especialmente palpable en los primeros momentos del universo. En este momento el universo se puede comparar con un niño que acaba de nacer y podría llegar a ser arquitecto, músico o empleado de banca, pero no puede llegar a serlo todo a la vez. Evidentemente, la ley probabilista contiene fluctuaciones e incluso bifurcaciones.

Al principio de este trabajo hemos mencionado la cuestión de las dos culturas. La ciencia clásica había nacido bajo el signo del dualismo. En su *Respuesta a las terceras objeciones* René Descartes reafirma, frente a Hobbes, la distinción entre dos sustancias, el cuerpo y el espíritu, que conocemos por actos o accidentes que les son propios:

> ... Hay ciertos actos que llamamos corporales, como la magnitud, la figura, el movimiento y todas las demás cosas que no se pueden concebir sin una extensión local, y llamamos con el nombre de cuerpo la sustancia en la que residen ... todos estos actos concuerdan entre sí, por cuanto presuponen la extensión. Después hay otros actos que llamamos intelectuales, como entender, querer, imaginar, sentir, los cuales no pueden ser sin pensamiento, o percepción, o conscien-cia y conocimiento; y la sustancia en la que residen, decimos que es una cosa que piensa, o un espíritu ... el pensamien-to, que es la razón común en la que concuerdan, es total-mente diferente de la extensión, que es la razón común de los otros.[30]

Descartes describe en estas líneas el contraste evidente entre los primeros objetos de la ciencia física naciente (como el péndulo o la piedra que cae) y los actos intelectuales.

La materia está asociada a la extensión, y por lo tanto a una geometría. Es sabido que la idea central de la obra de Einstein fue acceder a una descripción geométrica de la física. En cambio, los actos intelectuales están asociados al pensamiento, y éste no se puede separar de la distinción entre un «antes» y un «después», es decir, de la flecha del tiempo.

La paradoja del tiempo expresa una forma de dualismo cartesiano. Recientemente se ha publicado un libro muy interesante de un físico matemático eminente, Roger Penrose: *La nueva mente del emperador.* En él leemos: «... nuestra actual falta de comprensión de las leyes fundamentales de la física nos impide entender el concepto de ''mente'' [*mind*] en términos físicos o lógicos».[31]

Creo que Penrose tiene razón: no había lugar para el pensamiento en la imagen que daba la física clásica del universo. En esta imagen el universo aparecía como un vasto autómata, sometido a leyes deterministas y reversibles, en las que resultaba difícil reconocer lo que para nosotros caracteriza al pensamiento: la coherencia o la creatividad.

Penrose cree que para incluir estas propiedades en el mundo físico tenemos que dirigir nuestra atención hacia los agujeros negros y la cosmología. Los agujeros negros son esos objetos extraños que atraen irreversiblemente la materia gracias a un campo gravitatorio intenso (objetos que ya había imaginado Laplace).

Los trabajos que he resumido en estas líneas revelan que para solucionar el dualismo cartesiano no hace falta recurrir directamente a la cosmología. Comprobamos que a nuestro alrededor existen objetos que obedecen a leyes clásicas deterministas y reversibles, pero estos objetos corresponden a casos simples, casi a excepciones, como el movimiento planetario de dos cuerpos. Por otra parte, tenemos los objetos a los que se aplica el segundo principio de la termodinámica, que constituyen la inmensa mayoría. Por eso hoy, incluso dejando a un lado la historia, es preciso hacer una distinción cosmológica entre estos dos tipos de situaciones. Es una distinción entre estabilidad, por un lado, e inestabilidad y caos por otro.

No es que la cosmología deje de ocupar un lugar destacado. Todo lo contrario, el *big bang* nos indica que hay un momento particular en el que la materia, tal como la conocemos, surgió del vacío cuántico. Siempre hemos sostenido que se trata de un fenómeno irreversible por excelencia, y hemos tratado de analizarlo en términos de inestabilidad. El universo forma un todo, y la existencia de una flecha del tiempo única tiene un origen cosmológico.

Esta flecha del tiempo sigue presente en la actualidad. Es más, existe un estrecho vínculo entre irreversibilidad y complejidad. Cuanto más nos elevamos en los niveles de complejidad (química, vida, cerebro), más evidente es la flecha del tiempo, lo cual corresponde al papel constructivo del tiempo, tan evidente en las estructuras disipativas mencionadas al principio de estas conferencias.

La ciencia tiene un papel fundamental en nuestra cul-

tura. Pero la reacción ante la ciencia no es unánime. En *La nueva alianza*, Isabelle Stengers y yo citamos un texto publicado en 1974 con motivo de un coloquio de la UNESCO, cuyo título es «La ciencia y la diversidad de las culturas»:

> Desde hace más de un siglo, el sector de la actividad científica ha crecido tanto en el espacio cultural que parece como si sustituyera al conjunto de la cultura. Para algunos esto es sólo una ilusión producida por la velocidad de este crecimiento, y las líneas de fuerza de esta cultura no tardarán en surgir de nuevo, para tomar las riendas al servicio del hombre. Para otros este triunfo reciente de la ciencia le otorga el derecho a regentar el conjunto de la cultura, que sólo merecería este título en la medida en que se dejara difundir a través del aparato científico. Por último, hay quienes, asustados por la manipulación a la que están expuestos el hombre y las sociedades si caen bajo el poder de la ciencia, ven perfilarse en esto el espectro del fracaso cultural.

Y añadimos:

> El desarrollo científico desemboca en una verdadera elección metafísica, trágica y abstracta: el hombre tiene que elegir entre la tentación, tranquilizadora pero irracional, de buscar en la naturaleza la garantía de los valores humanos, la manifestación de una pertenencia esencial, y la fidelidad a una racionalidad que le deja solo en un mundo mudo y estúpido.[32]

En un libro reciente, Richard Tarnas expresa la misma idea: «La pasión más profunda de la mente occidental ha sido la de reunirse con la razón de su ser».[33]

Es interesante señalar que los desarrollos recientes que hemos resumido en estas líneas van precisamente en esta dirección. Ponen de manifiesto la extensión de la ciencia a un conjunto de fenómenos que la ciencia clásica había relegado a la «fenomenología», y que, sin embargo, para nosotros son la parte esencial de la naturaleza. Según Einstein, el representante más ilustre de la ciencia clásica, para llegar a la armonía de lo eterno había que ir más allá del mundo sensible con sus tormentos y añagazas. El triunfo de la ciencia estaría relacionado con la demostración de que nuestra vida —inseparable del tiempo— sólo es una ilusión. Es un concepto grandioso, sin duda, pero también profundamente pesimista. La eternidad no conoce sucesos, pero ¿cómo disociamos la eternidad de la muerte?

En cambio, el mensaje de esta obra es optimista. La ciencia empieza a ser capaz de describir la creatividad de la naturaleza, y hoy el tiempo ya no habla de soledad, sino de alianza entre el hombre y la naturaleza descrita por él.

Apéndice

Teoría espectral y caos

Quisiera presentar aquí de forma más sistemática algunas nociones utilizadas en el texto. Más que una exposición rigurosa, lo que pretendo es relacionar dichas nociones con unos resultados que son familiares, e indicar las referencias en las que el lector puede encontrar desarrollos suplementarios o demostraciones.

1. *Las dos formulaciones de la dinámica clásica*

Para empezar, tenemos la formulación en *trayectorias*. La más importante (véanse capítulos 3-5) es la formulación hamiltoniana. El hamiltoniano $H(p, q)$ es la energía expresada en cantidades de movimiento p y coordenadas q. Dado $H(p, q)$, las trayectorias resultan de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{A.1.1}$$

Estas trayectorias se desarrollan en el espacio de las fases

(q, p). En vez de considerar trayectorias individuales, podemos pasar a una descripción probabilista (véase capítulo 7). En todas las obras de mecánica estadística[1] se demuestra que la probabilidad ρ obedece a la ecuación de Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad \text{(A.1.2)}$$

Resulta útil introducir una formulación en términos de operadores y multiplicar (A.1.2) por $i = \sqrt{-1}$. Entonces tendremos

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho \qquad \text{(A.1.3)}$$

donde L es el operador lineal

$$L = -i\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} + i\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \qquad \text{(A.1.4)}$$

Una vez conocido ρ podemos calcular el valor medio de cualquier magnitud mecánica $A(p, q)$

$$\langle A \rangle = \int dp\, dq\, A(p, q)\rho \qquad \text{(A.1.5)}$$

Para discutir la ecuación de Liouville introducimos la noción de espacio de Hilbert. Históricamente, el espa-

cio de Hilbert se estudió al principio en mecánica cuántica[2] y luego fue aplicado por Koopman[3] a la mecánica clásica.[4]

Señalemos algunas propiedades del espacio de Hilbert. Supone la existencia de un producto escalar (f^* es el complejo conjugado de f)

$$\langle f|g\rangle = \int dx\ f^*(x)\ g(x) \qquad \text{(A.1.6)}$$

y de una norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \geqslant 0 \qquad \text{(A.1.6')}$$

La condición $\langle f|f\rangle = 0$ implica que $f = 0$.

El espacio de Hilbert está formado, pues, por las funciones de cuadrado sumable (la variable de integración x es reemplazada por las coordenadas y los momentos cuando se considera el espacio de las fases).

Un operador en el espacio de Hilbert transforma una función de este espacio en otra

$$\Theta f = g$$

El operador *adjunto* Θ^+ está definido por la relación

$$\langle \Theta f|g\rangle = \langle f|\Theta^+ g\rangle \qquad \text{(A.1.7)}$$

Un operador es *autoadjunto* (o hermítico) cuando

$$\Theta = \Theta^{+} \qquad \text{(A.1.8)}$$

También existen las condiciones sobre el dominio, que no vamos a abordar aquí.[5]

Un operador *isométrico* conserva la norma de una función

$$\langle \Theta f | \Theta f \rangle = \langle f | f \rangle \qquad \text{(A.1.9)}$$

Cuando el operador isométrico admite un inverso Θ^{-1}, o sea

$$\Theta\Theta^{-1} = \Theta^{-1}\Theta = 1 \qquad \text{(A.1.10)}$$

donde 1 es el operador unidad, el operador Θ es unitario

$$\Theta^{+} = \Theta^{-1} \qquad \text{(A.1.10')}$$

ya que la fórmula (A.1.9) nos da

$$\Theta\Theta^{+} = \Theta^{+}\Theta = 1 \qquad \text{(A.1.11)}$$

El operador de Liouville L (A.1.4) es hermítico, tal como se verifica partiendo del producto escalar (A.1.5) en el espacio de las fases

$$\langle f | g \rangle = \int dp\, dq\, f^{*}(q, p)\, g(q, p) \qquad \text{(A.1.12)}$$

Por lo tanto, tenemos

$$L = L^{\dagger} \tag{A.1.13}$$

La solución de la ecuación de Liouville es

$$\rho(t) = e^{-iLt}\,\rho(0) \tag{A.1.14}$$

El operador de evolución $U = e^{-iLt}$ es unitario

$$U_t^{+} = U_t^{-1} = e^{-iLt} \tag{A.1.15}$$

La fórmula (A.1.14) describe un *grupo dinámico*

$$U_{t_1 + t_2} = U_{t_1} U_{t_2} \qquad (t_1,\ t_2 \text{ positivos o negativos}) \tag{A.1.16}$$

La dirección del tiempo no tiene ninguna influencia. Introduzcamos una base ortonormal en el espacio de Hilbert. Es un conjunto de funciones u_i que nos permite representar una función arbitraria F del espacio de Hilbert en términos de estas funciones

$$F = \Sigma\, c_n\, u_n \tag{A.1.17}$$

La ortonormalidad es expresada por las condiciones

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} \begin{matrix} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{matrix} \tag{A.1.18}$$

Multipliquemos (A.1.17) por u_m^* y tomemos el producto escalar (A.1.15). A causa de (A.1.18)

$$c_m = \langle u_m | F \rangle$$

Cada elemento del espacio de Hilbert puede aparecer tanto a la izquierda como a la derecha en un producto escalar. De acuerdo con una notación introducida por Dirac[6] podemos escribir u_n como un «vector *bra*»

$$\langle u_n |$$

o un «vector *ket*»

$$| u_n \rangle$$

El producto escalar pasa a ser un producto de un *bra* y un *ket* $\langle u_n | u_m \rangle$. La relación (A.1.17) se puede escribir de una manera más transparente

$$|F\rangle = \Sigma\, c_n |u_n\rangle = \Sigma |u_n\rangle\langle u_n | F\rangle \qquad \text{(A.1.19)}$$

Dado que nuestra relación sigue siendo válida para cada $|F\rangle$, obtenemos la condición de cierre (*completeness relation*)

$$1 = \Sigma |u_n\rangle\langle u_n| \qquad \text{(A.1.20)}$$

En el texto hemos usado bases biortonormales $|u_n\rangle$, $|\tilde{u}_n\rangle$ como

$$\langle \tilde{u}_i | u_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \text{(A.1.21)}$$

$$\sum_n |\tilde{u}_n\rangle\langle u_n| = 1 \qquad \sum_n |u_n\rangle\langle \tilde{u}_n| = 1 \qquad \text{(A.1.22)}$$

Expresemos un operador en una base ortonormal (o biortonormal). Pongamos

$$\langle u_\mu | A u_\nu \rangle = A_{\mu\nu} \qquad \text{(A.1.23)}$$

Entonces tendremos la representación de A en la base elegida

$$A = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} |u_\mu\rangle\langle u_\nu| \qquad \text{(A.1.24)}$$

que es fácil de verificar.

Del mismo modo, utilizando una base biortonormal se obtiene

$$A = \Sigma\, A_{\mu\nu} |u_\mu\rangle\langle \tilde{u}_\nu| \qquad A_{\mu\nu} = \langle \tilde{u}_\mu | A u_\nu \rangle \qquad \text{(A.1.25)}$$

El conjunto de los elementos $A_{\mu\nu}$ forma una matriz; tenemos, pues, una representación matricial del operador A.

Pasemos al problema de los valores propios y de las funciones propias de operadores en el espacio de Hilbert. Consideremos el operador de Liouville y tratemos de satisfacer la ecuación

$$L|\varphi_\lambda\rangle = \lambda|\varphi_\lambda\rangle \qquad \text{(A.1.26)}$$

Los valores propios λ pueden ser continuos o discretos.[2]

Un teorema fundamental demuestra que los valores propios de operadores hermíticos son *reales*.[2] Además, el conjunto de las funciones propias forma un sistema ortonormal. En consecuencia, los valores propios del operador de evolución $U_t = e^{-iLt}$ son de módulo unidad.

$$U_t|\varphi_\lambda\rangle = e^{-i\lambda t}|\varphi_\lambda\rangle \qquad \text{(A.1.27)}$$

Ahora podemos expresar L o U_t en términos de sus funciones propias. La matriz $L_{\mu\nu}$ (véase A.1.23) se vuelve diagonal, y podemos escribir

$$L = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle \lambda \langle\varphi_\lambda| \qquad \text{(A.1.28)}$$

Asimismo

$$U_t = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle e^{-i\lambda t} \langle\varphi_\lambda| \qquad \text{(A.1.29)}$$

Esta es la representación espectral del operador de Liouville L y del correspondiente operador de evolución U_t.

El operador de evolución U_t sólo contiene frecuencias correspondientes a osciladores. Esto podría parecer un obstáculo para una teoría microscópica de los fenómenos irreversibles, pero lo podemos salvar pasando a espacios generalizados (*rigged Hilbert spaces*, en la tercera parte de este Apéndice). Ahora podemos dar la solución formal de la ecuación de Liouville (A.1.14). Desarrollamos ρ en fun-

ciones φ_λ y obtenemos

$$|\rho(t)\rangle = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle e^{-i\lambda t}\langle\varphi_\lambda|\rho(0)\rangle \qquad \text{(A.1.30)}$$

Hemos obtenido así la segunda formulación probabilista de la dinámica clásica. En casos sencillos (sistemas integrables, véase el capítulo 5)[4] se pueden construir las funciones propias y los valores propios. Pero en general nos encontramos con las divergencias de Poincaré. Sólo tenemos teoremas de existencia.[5]

Las formulaciones de la dinámica clásica en términos de trayectoria y en términos de ρ en el espacio de Hilbert son absolutamente equivalentes. Nada nos impide partir de una trayectoria correspondiente a una función $\rho(0) = \delta(p - p_0)\delta(q - q_0)$ en el espacio de las fases. El producto escalar

$$\langle\varphi_\lambda(q, p)|\delta(q-q_0)\delta(p-p_0)\rangle = \varphi_\lambda(q_0, p_0) \qquad \text{(A.1.31)}$$

está bien definido, y $\rho(t)$ se reduce también a una función δ, a saber $\delta[q-q(t)]\delta[p-p(t)]$, donde $q(t)$ y $p(t)$ son las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (véase mi trabajo citado en la nota 4 de este Apéndice). El elemento nuevo es que en el caso de los sistemas caóticos existe una segunda representación de los operadores L y U en los espacios generalizados, que esta vez no se puede *reducir a la descripción en términos de trayectoria*, pues la representación espectral excluye las trayectorias representadas por funciones singulares.

2. *Las dos formulaciones de la mecánica cuántica*

Hemos aludido varias veces a la mecánica cuántica (sobre todo en los capítulos 3 y 4). Hemos visto que en este campo la magnitud fundamental es la amplitud Ψ, que obedece a la ecuación de Schrödinger (cogemos $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{op} \Psi \qquad \text{(A.2.1)}$$

Esta ecuación sustituye a las de Hamilton (A.1.1); H_{op} es el hamiltoniano en el que los operadores han ocupado el lugar de las variables clásicas, por ejemplo:

$$q \rightarrow q_{op} \qquad p \rightarrow p_{op} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q} \qquad \text{(A.2.2)}$$

Los momentos p se convierten en operadores de derivación. La teoría del espacio de Hilbert se desarrolló a propósito de la mecánica cuántica:[4] nótese la analogía entre (A.2.1) y (A.1.3). H_{op} es un operador hermítico en el espacio de Hilbert. Nótese además que en la «representación» coordenada q (para A.2.2) los momentos no son variables independientes.

Consideremos el problema desde el punto de vista de los valores propios de los E_n (compárese con A.1.26)

$$H_{op}|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle \qquad \text{(A.2.3)}$$

que son los niveles de energía del sistema y forman una serie discreta (espectro discreto) o continua (espectro continuo). Los niveles de energía son reales y las funciones propias forman un sistema ortonormal completo. Utilizando la notación *bracket* introducida por Dirac en 1958 podremos escribir para la función de onda en el instante inicial $\Psi(0)$ (véase A.1.19)

$$\Psi(0)\rangle = \Sigma|u_n\rangle\langle u_n|\Psi(0)\rangle \qquad \text{(A.2.4)}$$

y (véase A.1.30)

$$\Psi(t) = U(t)\Psi(0) = \Sigma|u_n\rangle e^{-iE_n/h}\langle u_n|\Psi(0)\rangle = \\ = \Sigma\, c_n\, e^{-iE_n t/h}|u_n\rangle \qquad \text{(A.2.5)}$$

Esta relación ya se ha indicado en el capítulo 6. En ese contexto hemos discutido el significado físico de los coeficientes c_n, de los que obtenemos la «potencialidad» correspondiente en el estado u_n.

Como en el caso clásico, podemos pasar a una descripción probabilista. Ya hemos visto (capítulo 7) Ψ es una amplitud de la probabilidad. Consideremos la probabilidad (también llamada matriz-densidad) dada por $\rho = \Psi\Psi^+$. Partiendo de (A.2.1) se verifica inmediatamente que ρ satisface la ecuación

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = H\rho - \rho H \qquad \text{(A.2.6)}$$

que es el análogo cuántico de (A.1.2), y también podemos escribir (véase A.1.3)

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho \qquad (A.2.6')$$

En el caso de los sistemas integrables (es decir, aquellos en los que no podemos resolver el problema de los valores propios, véase A.2.3), las dos formulaciones en mecánica cuántica (A.2.1) y (A.2.6) son equivalentes (las funciones propias del operador cuántico L son productos de funciones propias de H y de los valores propios de las diferencias). Pero en el caso del «caos cuántico» no es así. Al igual que en el caso clásico, obtenemos entonces una representación que no puede reducirse a funciones de onda, y esto en espacios generalizados.

3. *Espacios generalizados*

En la primera sección hemos visto que los operadores hermíticos L y H_{op} tienen valores propios reales. Esta propiedad se basa esencialmente en las propiedades del espacio de Hilbert y, sobre todo, en la existencia de la norma (A.1.6).

Para obtener una teoría espectral compleja de operadores hermíticos hay que pasar a espacios generalizados no normalizados, también llamados *rigged Hilbert spaces*.[8] En el espacio de Hilbert un operador unitario tiene

valores propios de módulo 1 (véanse A.1.27 y A.2.5 $\| e^{-i\lambda t} \| = 1$), mientras que en los espacios generalizados estos valores propios pueden tener módulo distinto de 1 (por ejemplo, de la forma $e^{-i\lambda t - \gamma t}$, donde λ y γ son reales). Esto es lo que permite la introducción de la irreversibilidad en la descripción dinámica. De modo que, para nosotros, es fundamental tomar en consideración los espacios generalizados. En esta sección indicaremos algunas de sus propiedades esenciales (para más detalles, véase la nota 8). En la siguiente sección aplicaremos estas nociones a los ejemplos de Bernoulli y del panadero antes mencionados.

La idea principal es mantener el producto escalar

$$\langle f|\varphi\rangle = \text{finito} \qquad \text{(A.3.1)}$$

pero en este caso f puede ser una función singular, como la función $\delta(x - x_0)$ no perteneciente al espacio de Hilbert, a condición de que φ sea una función lo bastante regular (función test), perteneciente a una subclase del espacio de Hilbert. Llamemos L^2 a la clase de las funciones perteneciente al espacio de Hilbert (es decir, de cuadrado sumable, véase A.1.6), Φ a la clase de las funciones test y Φ^+ a la clase de las funciones singulares f. Entonces obtendremos

$$\Phi \subset L^2 \subset \Phi^+ \qquad \text{(A.3.2)}$$

Las funciones test forman una subclase del espacio de Hilbert.

Este es el famoso triplete de Gelfand. Podemos definir la acción del operador Θ sobre f gracias a (A.1.7). Más precisamente, es la «extensión» del operador Θ de L^2 a Φ'

$$\langle \Theta f | \varphi \rangle = \langle f | \Theta' \varphi \rangle \qquad \text{(A.3.3)}$$

Esta definición tiene sentido a condición de que la función $\Theta' \varphi$ permanezca en el espacio test Φ.

Podemos así definir las funciones propias «a derecha»:

$$\Theta | f \rangle = z | f \rangle \text{ o bien } \langle \varphi | \Theta f \rangle = z \langle \varphi | f \rangle \qquad \text{(A.3.4)}$$

y luego las «a izquierda»:

$$\langle \tilde{f} | \Theta = z \langle \tilde{f} | \text{ o bien } \langle \tilde{f} | \Theta \varphi \rangle = z \langle \tilde{f} | \varphi \rangle \qquad \text{(A.3.5)}$$

El clásico ejemplo de aplicación de los espacios generalizados es el problema espectral asociado al operador $\Theta = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ en el dominio $-\infty < x < +\infty$ ... El resultado es:

$$-\frac{d^2}{dx^2} e^{-ikx} = k^2 e^{-ikx} \qquad \text{(A.3.6)}$$

Por lo tanto, las funciones propias son e^{-ikx} y los valores propios k^2. Las funciones propias e^{-ikx} no pertenecen al espacio de Hilbert, ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{ikx}\ e^{-ikx} = \infty \qquad \text{(A.3.7)}$$

en contradicción con (A.3.1).

Por el contrario, el producto escalar con una función test tiene que ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{ikx}\ \varphi(x) = \langle e^{-ikx}|\varphi\rangle = \text{finito} \qquad \text{(A.3.8)}$$

Además, queremos que las expresiones (A.3.3) estén bien definidas y que los operadores Θ sean operadores de multiplicación x^n o de derivación $\dfrac{d^n}{dx^n}$ (como sucede en mecánica cuántica).

Veremos que para esto, en primer lugar, se necesita que las funciones test $\varphi(x)$ sean infinitamente derivables, y en segundo lugar que decrezcan de forma bastante rápida para $x \to \pm \infty$. Estas funciones test que forman una subclase del espacio de Hilbert se llaman «funciones Schwartz».

Vamos a concluir con una importante observación: veamos el efecto del operador de evolución U_t sobre f. Por (A.3.3.) obtenemos

$$\langle U_t f|\varphi\rangle = \langle f|U_t^+\varphi\rangle \qquad \text{(A.3.9)}$$

Esta expresión encontrará una definición perfecta si $U_t^+\varphi$ *permanece en el espacio test*. En los sistemas caóticos veremos que generalmente esta condición no puede ser

satisfecha a la vez para $t > 0$ y $t < 0$. Esto lleva a la destrucción del grupo dinámico (A.1.16) y a su sustitución por dos semigrupos, uno de ellos válido para $t > 0$ y el otro para $t < 0$.[9] Es la expresión matemática de la ruptura de la simetría temporal.

4. *Sistemas caóticos*

Volvamos ahora a los dos ejemplos estudiados en el texto: el desplazamiento de Bernoulli y la transformación del panadero. Se trata de sistemas caóticos caracterizados por un exponente de Liapunov. Primero vamos a estudiar las propiedades espectrales del operador de evolución en el desplazamiento de Bernoulli.

Recordemos que las ecuaciones del movimiento (que aquí sustituyen a las de Hamilton A.1.1) son:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \qquad \text{para} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ &= 2x_n - 1 \qquad \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

Partimos de la identidad variable para una trayectoria (representada por una función δ)

$$\delta(x - f(x_0)) = \int_0^1 dy\ \delta(x - f(y))\delta(y - x_0) \tag{A.4.2}$$

Tomamos para *f(x)* la transformación (A.4.1) y aplicamos (A.4.2) en un conjunto de trayectorias —que vuelve a sustituir a $\delta(y - x_0)$ por $\rho_n(y)$.

Tendremos:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 dy\ \delta(x - f(y))\rho_n(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho_n\left(\frac{x}{2}\right) + \rho_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = U\rho_n(x) \qquad \text{(A.4.3)}$$

Esta fórmula define el operador de Perron-Frobenius para el desplazamiento de Bernoulli.

También podemos definir el operador adjunto U^+.

Utilizando (A.1.7), se demuestra[10] que

$$U^+ f(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases} \qquad \text{(A.4.4)}$$

o bien, de un modo más compacto

$$U^+ f(x) = f(2x)\Theta\left(\frac{1}{2} - x\right) + f(2x-1)\Theta\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(A.4.5)}$$

con

$$\Theta(y) = 1 \quad y > 0$$
$$= 0 \quad y \leqslant 0$$

El operador U^+ es un operador «isométrico», y por lo tanto muy próximo a los operadores unitarios de evolución de la mecánica clásica o cuántica (véase A.1.15 y la segunda sección de este Apéndice). Los operadores unitarios también admiten un inverso.

Pero hay una diferencia esencial: el operador U^+ no admite representación espectral en el espacio de Hilbert.[11] Es un teorema riguroso. Por otra parte es fácil comprobar que no hay ninguna función continua, además de una constante, que pueda verificar la relación

$$U^+|f(x)> = \lambda|f(x)> \qquad \text{(A.4.6)}$$

Debemos, pues, dirigir nuestra atención hacia los espacios generalizados. En cambio, podemos verificar que la función singular $\tilde{B}_1(x) = [\delta(x-1) - \delta(x)]$ es una función propia de U^+ y que se obtiene:

$$U^+|\tilde{B}_1(x)> = \frac{1}{2}|\tilde{B}_1(x)> \qquad \text{(A.4.7)}$$

(dado que se trata de una función singular, esta relación se tiene que considerar en combinación con una función test, como en A.3.4). Se demuestra[11] que de forma más general se obtiene

$$U^{+}|\tilde{B}_n(x) > = \frac{1}{2^n}|\tilde{B}_n(x) > \qquad \text{(A.4.8)}$$

con

$$\tilde{B}_n(x) > = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}\,[\delta^{(n-1)}(x-1) - \delta^{(n-1)}(x)] & n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\text{con} \qquad \delta^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\,\delta(x) \qquad \text{(A.4.9)}$$

En los espacios generalizados el operador isométrico tiene muchos valores propios cuyo módulo es distinto de la unidad (véase la tercera sección de este Apéndice), que en este caso están relacionados con el tiempo de Liapunov, y por lo tanto describen fenómenos irreversibles relacionados con la aproximación al equilibrio.

Los valores propios correspondientes a (A.4.8) son $e^{-n\lg 2}$.

Comparando con la forma de los valores propios en el espacio de Hilbert $e^{i\lambda n}$ (n desempeña aquí el papel del tiempo), vemos que λ es puramente imaginario. Es un ejemplo de *teoría espectral compleja*.

Tomemos ahora el operador U.

En el capítulo cuarto ya hemos visto que

$$U\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

En realidad, $x - \frac{1}{2}$ es un polinomio de Bernoulli. En general obtenemos[11]

$$U|B_n(x)\rangle = \frac{1}{2^n}|B_n(x)\rangle \qquad \text{(A.4.10)}$$

Por último, verificamos que las funciones $B_n(x)$, $\tilde{B}_m(x)$ forman un sistema binormal (véase A.1.21, A.1.22) y completo.[10] Por lo tanto, podemos escribir la representación espectral de U y de U^+

$$U = \Sigma \frac{1}{2^n}|B_n(x)\rangle \langle\tilde{B}_n(x)| \qquad \text{(A.4.11)}$$

$$U^+ = \Sigma \frac{1}{2^n}|\tilde{B}_n(x)\rangle \langle B_n(x)| \qquad \text{(A.4.12)}$$

Preguntémonos a qué clase de funciones pertenecen las probabilidades ρ para las que se puede escribir (véase capítulo 4)

$$|\rho(x)\rangle = \Sigma|B_n(x)\rangle \langle\tilde{B}_n|\rho\rangle \qquad \text{(A.4.13)}$$

A partir de (A.4.9) vemos que una condición suficiente es que el espacio test esté formado por polinomios $P_m(x)$ de grado arbitrario m. Este espacio test es «estable» para la evolución U, ya que la expresión (A.4.4) muestra que un polinomio de grado m sigue siendo un polinomio

de grado m por aplicación de U. Como ya se ha indicado en el texto, la necesidad de utilizar funciones test (en este caso polinomios) elimina las trayectorias. La representación probabilista es, por lo tanto, *irreducible*.

Veamos ahora un segundo ejemplo, la transformación del panadero, descrita en el capítulo 3. Concretamente tenemos las «ecuaciones del movimiento»

$$(x, y) \to \begin{cases} \left(2x \quad , \frac{1}{2}\right) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(2x - 1, \frac{y + 1}{2}\right) & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{(A.4.13')}$$

La diferencia con el caso del desplazamiento de Bernoulli consiste en la existencia de una transformación inversa obtenida permutando x e y. A partir de las «ecuaciones del movimiento» (A.4.13), obtenemos la expresión explícita de U y U^{+}:

$$U\ \rho(x, y) = \rho\left(\frac{x}{2}, 2y\right)\Theta\left(\frac{1}{2} - y\right) + \rho\left(\frac{x + 1}{2}, 2y - 1\right)\Theta\left(y - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(A.4.14)}$$

$$U^{+}\rho(x, y) = \rho\left(2x, \frac{y}{2}\right)\Theta\left(\frac{1}{2} - x\right) + \rho\left(2x - 1, \frac{y + 1}{2}\right)\Theta\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(A.4.15)}$$

Destacaremos algunas propiedades que van a tener su importancia. En el ejemplo anterior hemos visto que en el caso de Bernoulli los polinomios forman el espacio test. Tomemos ahora funciones de la forma

$$\rho(x, y) = P(x)\,\varphi(y) \qquad \text{(A.4.16)}$$

donde P(x) es un polinomio en x y $\varphi(y)$ una función integrable (por ejemplo, una función del espacio de Hilbert). Enseguida comprobamos que esta forma es estable para U, pero no para U^+.

Asimismo la clase de las funciones

$$\rho(x, y) = \varphi(x)\,P(y) \qquad \text{(A.4.17)}$$

es estable para U^+ y no para U.

La transformación del panadero es un sistema dinámico propiamente dicho. El operador de evolución es unitario ($U^+ = U^{-1}$).

Por lo tanto, U admite una representación espectral en el espacio de Hilbert

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k(x, y)\rangle\, e^{ik} \langle f_k(x, y)| \qquad \text{(A.4.18)}$$

pero, además, existe una representación irreducible en los espacios generalizados que escribiremos (para simplificar despreciamos los efectos de degeneración en el espectro)[12]

$$U = \Sigma |F_n(x, y)\rangle \frac{1}{2^n} \langle \tilde{F}_n(x, y)| \qquad \text{(A.4.19)}$$

Los valores propios son los mismos que en (A.4.11), también relacionados con el tiempo de Liapunov. La principal diferencia es el hecho de que ahora $|F_n>$ y $|\tilde{F}_n>$ son simultáneamente funciones singulares.

En una palabra[12]

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &\sim \text{polinomio en } x, \times \text{ distribución en } y \\ \tilde{F}_n(x, y) &\sim \text{distribución en } x, \times \text{ polinomio en y} \end{aligned} \qquad \text{(A.4.20)}$$

Consideremos la probabilidad ρ; las funciones F_n y $\tilde{F}_n$, formando un conjunto ortonormal, nos permiten escribir:

$$\rho = \Sigma\, F_n\rangle\langle\tilde{F}_n|\rho\rangle \qquad \text{(A.4.21)}$$

Así tendremos el valor medio de una función $A(x, y)$ (un «observable»)

$$\langle A\rangle = \langle A|\rho\rangle = \Sigma\langle A|F_n\rangle\langle\tilde{F}_n|\rho\rangle \qquad \text{(A.4.22)}$$

Al ser F_n y $\tilde{F}_n$ distribuciones, es necesario que A y ρ formen parte de espacios test apropiados. A partir de (A.4.16), vemos que es necesario que

$$\begin{aligned} \rho &\sim \text{polinomio en } x, \times \text{ función integrable en } y \\ A &\sim \text{función integrable en } x, \times \text{ polinomio en } y \end{aligned} \qquad \text{(A.4.23)}$$

La primera condición excluye de nuevo las trayectorias $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$, ya que $\delta(x - x_0)$ no es un polinomio en x.

La segunda condición reduce los observables a funciones continuas en y. Ya hemos señalado en capítulos anteriores que esta es una condición necesaria para que se pueda hablar de acercamiento al equilibrio.

Estudiemos la evolución del tiempo mediante la aplicación del operador U (para $t > 0$) a ρ o bien a A. Para ello debemos tomar

$$\langle A|UF_n\rangle = \langle U^+A|F_n\rangle \qquad \text{(A.4.24)}$$

Esta es una expresión perfectamente definida, porque U^+ (véanse A.4.15-A.4.17) preserva la clase de los polinomios en y.

Igualmente, $U|F_n\rangle$ preserva la forma (A.4.16). Por lo tanto podemos usar (A.4.17) para estudiar la evolución hacia el *futuro*, pero no hacia el pasado, para la cual debemos utilizar el operador $U^{-1} = U^+$. En lugar de (A.4.24) obtenemos entonces

$$\langle A|U^+F_n\rangle = \langle UA|F_n\rangle \qquad \text{(A.4.25)}$$

y UA no preserva el espacio test (A.4.19).

Son unos resultados de fundamental importancia, ya que:

1) la representación es irreducible.

2) el grupo dinámico U_t se descompone en dos semi-

grupos, uno de ellos para el futuro y el otro para el pasado.

También podemos decir que $|F_n\rangle$ está orientado hacia el futuro y $|\tilde{F}_n\rangle$ hacia el pasado: es la ruptura de la simetría temporal que hemos mencionado varias veces.

5. Teoría espectral del caos y leyes de la naturaleza

A partir de (A.1.2), se advierte que toda probabilidad, que es sólo función del hamiltoniano $\varphi(H)$, lleva a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. En otras palabras (véase A.1.3)

$$L\varphi = 0 \qquad \text{(A.5.1)}$$

φ es una función propia de L correspondiente a un valor propio nulo. Se llaman sistemas ergódicos los sistemas dinámicos tales que (A.5.1) sólo admite la solución $\varphi(H)$. La función φ es una constante en la superficie $H(p, q) = E$. Para simplificar tomaremos $\varphi = 1$.

Los sistemas «mezcladores» (*mixing*) se caracterizan por el hecho de que para tiempos largos ($t \to +\infty$ o $t \to -\infty$) los valores medios $\langle A \rangle$ de observables tienden a sus valores medios en la superficie $H = E$. Por lo tanto en 1 dimensión

$$\int dx\ A(x)\ \rho(x, t) = \int dx\ A(x)\varphi =$$

$$= \int dx\ A(x),\ t \to \pm\infty \qquad \text{(A.5.2)}$$

La condición para los sistemas mezcladores es que el espectro de L para $\lambda = 0$ (A.1.25) sea continuo.[13]

El caos requiere las condiciones más restrictivas: la definición usual necesita la existencia del tiempo de Liapunov (o más en general una «entropía» de Kolmogorov-Sinai).[13]

Sin embargo, esta definición tropieza con dificultades cuando se aplica a grandes sistemas como los LPS clásicos o cuánticos (la entropía de Kolmogorov-Sinai es divergente). Este es el motivo por el cual adoptamos la definición más general.

Los sistemas dinámicos son caóticos cuando su operador de evolución admite una representación irreductible:

En la cuarta sección de este Apéndice hemos usado sistemas simples. Debemos tener en cuenta que esta definición se aplica también a los sistemas cuánticos.[7, 12]

6. *Representaciones irreducibles en mecánica cuántica*

El operador hamiltoniano H y el operador de Liouville-von Neumann son hermíticos. Tienen únicamente valores propios reales en el espacio de Hilbert y ningún fenómeno irreversible aparece en el espectro.

En unos casos simples (por ejemplo, estados atómicos inestables) podemos quedarnos al nivel de funciones de onda con la condición de abandonar el espacio de Hilbert (prolongamiento analítico, «vectores de Gamow»). Pero estos métodos no se centran en el equilibrio (la matriz den-

sidad ρ está representada por una distribución microcanónica o canónica).

Para obtener una teoría de los fenómenos irreversibles, se debe «salir» del espacio de Hilbert en el nivel de ρ. En la mecánica cuántica tradicional, la evolución ρ se efectúa en el espacio producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de dos espacios de Hilbert. Debemos intentar obtener la representación de los L en espacios más generales. Es lo que han hecho T. Petrosky y el autor en unos ejemplos simples. En el caso de los LPS, obtenemos efectivamente representaciones espectrales complejas irreducibles como las obtenidas para las aplicaciones estudiadas en el capítulo 3. Hay que señalar que estas nuevas respuestas de la mecánica cuántica han sido confirmadas por simulaciones numéricas.

Notas

1. R. S. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, 1965 (hay trad. cast.: *El carácter de la ley física*, Orbis, Barcelona, 1986).

2. S. Hawking, *A Brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes*, Bantam Books, Nueva York, 1988 (hay trad. cast.: *Historia del tiempo, Del big bang a los agujeros negros*, Crítica, Barcelona, 1988).

3. R. S. Feynman, *op. cit.*

4. I. Prigogine e I. Stengers, *Entre le temps et l'éternité*, Fayard, París, 1988, pp. 25 y ss (hay trad. cast.: *Entre el tiempo y la eternidad*, Alianza, Madrid, 1990).

5. H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, París, 1908 (hay trad. cast.: *Ciencia y método*, Espasa-Calpe, Madrid, 1963).

6. K. R. Popper, *Of Clouds and Clocks*, Washington, 1965.

7. I. Asimov, «The Last Question» [1956], en *Robot Dreams*, Berkeley Books, Nueva York, 1986 (hay trad. cast.: *Sueños de robot*, Plaza y Janés, Barcelona, 1989).

8. Véase, por ejemplo, G. Nicolis e I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1977.

9. D. Kondepudi, R. J. Kaufman y N. Singh, *Science*, 250 (1990), p. 975.

10. A. Turing, «The Physical Basis of Morphogenesis», en *Philosophical Transactions of the Royal Society*, B/237 (1952), p. 37.

11. P. Glandsdorv e I. Prigogine, *Structure, stabilité et fluctuations*, Masson, París, 1971.

12. V. Castets, E. Dalos, J. Boissonade y P. de Kepper, «Experimental Evidence of Sustained Standing Turing-Type Non Equilibrium Chemical Patterns», en *Physical Review Letters*, 64 (1990), pp. 2.953-2.956.

13. Q. Ouyang y H. L. Swinney, «Transition from a Uniform State to Exagonal and Striped Turing Patterns», *Nature*, 352 (1991), p. 610.

14. A. Einstein, «Autobiographical Notes», en P. A. Schilpp, ed., *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Nueva York, 1949 (hay trad. cast.: *Notas autobiográficas*, Alianza, Madrid, 1984).

15. S. Hawking, *op. cit.*

16. J. Lighthill, «The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics», *Proceedings of the Royal Society*, A/407 (1966), pp. 35-50.

17. H. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik, Weinheim, 1984.

18. P. Shields, *The Theory of Bernoulli Shifts*, University of Chicago Press, Chicago, 1973.

19. P. Ehrenfest y T. Ehrenfest, «Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung der Mechanik», *Encycl. Math. Wiss.*, vol. 4, p. 4, 1911 (reedición en inglés: *The Conceptual Foundations of Statistical Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca, 1959).

20. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1989.

21. Véase, por ejemplo, G. Nicolis e I. Prigogine, *Exploring Complexity*, Freeman, Nueva York, 1989, y H. Schuster, *op. cit.*

22. T. Petrosky e I. Prigogine, «Alternative Formulation of Classical and Quantum Dynamics for Non-Integrable Systems», *Physica*, 175 A (1991), p. 156.

23. R. S. Feynman, *op. cit.*

24. P. Davies, «The New Physics: a Synthesis», en P. Davies, ed., *The New Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, p. 6.

25. Como veremos, las resonancias conducen a representacio-

nes espectrales irreducibles a nivel probabilista. Es, pues, por definición, «el caos».

26. Véase, por ejemplo, I. Prigogine, *From Being to Becoming*, Freeman, Nueva York, 1980.

27. N. Bohr, «The Solvay Meeting and the Development of Quantum Physics», *La théorie quantique des champs*, Interscience, Nueva York, 1962.

28. J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987 (hay trad. cast.: *Lo decible y lo indecible en mecánica cuántica*, Alianza, Madrid, 1991).

29. Véanse las referencias en el Apéndice.

30. Descartes, *Méditations métaphysiques*, «Troisièmes Objections et Réponses», Flammarion, París, p. 300 (hay trad. cast.: *Meditaciones metafísicas con objeciones y respuestas*, Alfaguara, Madrid, 1993[4]).

31. R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford-Nueva York, 1989 (hay trad. cast.: *La nueva mente del emperador*, Mondadori, Madrid, 1991).

32. I. Prigogine e I. Stengers, *La Nouvelle Alliance*, Gallimard, París, 1979, citado a partir de la segunda edición de 1986 en la colección Folio, pp. 61-62 (hay trad. cast.: *La nueva alianza: metamorfosis de la ciencia*, Alianza, Madrid, 1994).

33. R. Tarnas, *The Passion of the Western Mind*, Harmony Books, Nueva York, 1991, p. 443.

Notas al Apéndice

1. R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, Nueva York, 1975.

2. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955 [1932] (hay trad. cast.: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, CSIC, Madrid, 1991[2]).

3. B. Koopman, «Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Space», *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.*, 17 (1931), p. 315.

4. I. Prigogine, *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, Nueva York, 1961.

5. Véase, por ejemplo, el clásico, F. Riesz y B. Sz-Nagy, *Functional Analysis* [1955], reedición Dover, 1991.

6. P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 1958 (hay trad. cast.: *Principios de mecánica cuántica*, Ariel, Barcelona, 1958).

7. T. Petrosky e I. Prigogine, «Poincaré's Theorem and Unitary Transformations for Classical and Quantum Theory», *Physica*, 147 A (1988), p. 439.

8. A. Böhm, *Quantum Mechanics*, Springer, Berlín, 1986, y A. Böhm y M. Gadella, *Dirac Kets, Gamov Vectors and Gelfand Triplets*, Springer, Berlín, 1989.

9. I. Antoniou e I. Prigogine, «Intrinsic Irreversibility and Integrability of Dynamics», *Physica*, 192 A (1993), p. 443.

10. A. Lasota y M. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

11. H. Hasegawa y W. Saphir, «Decaying Eigenstates for Simple Chaotic Systems», *Physics Letters*, A/161 (1992), p. 471; P. Gaspard «Γ-adic One-Dimensional Maps and the Euler Summation Formula», *Journal of Physics*, A, vol. 25 (1992), L483; I. Antoniou y S. Tasaki, «Spectral Decomposition of the Renyi Map», *Journal of Physics*, A: Math. Gen. 26 (1993), p. 73.

12. I. Prigogine, *From Being to Becoming,* Freeman, Nueva York, 1980; H. Hasegawa y W. Saphir, «Unitarity and Irreversibility in Chaotic Systems», *Physical Review*, A 46 (1993), p. 7.041; I. Antoniou y S. Tasaki, «Spectral Decomposition in β-adic Baker Map and Intrinsic Irreversibility», *Physica*, 190 A (1992), p. 303.

13. T. Petrosky e I. Prigogine, *Alternative Formulation*, cit., p. 146.

* * *

Quisiera también hacer referencia a los trabajos de Ruelle y Pollicott, quienes han sido los primeros en insistir sobre el papel de las resonancias en los sistemas caóticos: D. Ruelle, *Phys. Rev. Lett.*, 56, 405 (1986); *Comun. Math. Phys.* 125, 239 (1989); M. Pollicott, *Ann. Math.*, 181, 331 (1980).

Índice alfabético

acciones J, 72, 73
actualidades, 82, 83, 102
agujeros negros, 110
amplitud de probabilidad, 82, 85, 89-90, 127
antipartículas, 95
Arnold, *véase* KAM, teoría
Asimov, Isaac, 26; *The last question*, 27

Baker, 89
Bell, John S., 100
Bénard, inestabilidad de, 28
Bernoulli, *véase* desplazamiento de Bernoulli; polinomios de Bernoulli
bifurcaciones, puntos de, 29-30 y f., 32, 34, 36, 109; incompletas, 31 f.
big bang, 111
biología, 19; darwiniana, 18
Bohr, Niels, 99, 100, 101
Boltzmann, Ludwig, 23, 25, 43, 44, 48, 67, 107; esquema de, 23-24 f.
bra, vector, 122

campo gravitatorio, 110
campo unificado, teoría del, 18
caos: concepto de, 13-15, 71; dinámico, 28; espaciotemporal, 35 f.; molecular, 28
caóticos, sistemas, 132-141; *véase también* desplazamiento de Bernoulli; transformación del panadero
ciencia clásica, 113
cinética química, 28
clinamen, noción de, 17
clorato de sodio (NaClO), 31-32
Consejo Solvay, de 1927, 99
constructiva, representación, 94
correlaciones, flujo de, 91-93
cosmología, papel de la, 110-111; cuántica, 102
cristales: dextrógiros, 32; levógiros, 32

Darwin, Charles, 18, 19
darwinismo, 18-19
Davies, Paul A. M., 79-80
degeneración en espectro, efectos de, 138

Descartes, René: *Respuesta a las terceras objeciones*, 109
desplazamiento de Bernoulli, 43-44, 45, 46, 47 f., 48, 52, 54, 55, 59-68, 71, 75, 81, 93, 129, 132-133, 137
determinismo, 14, 29-30, 34, 36, 44, 74, 108, 110-111
dinámica: leyes de la clásica, 38, 43-44, 46, 48, 67, 101, 103, 107, 108, 117, 125; cuántica, 71-72; nueva formulación de la, 67
Dios, 7, 18
Dirac, Paul, 122, 127
disipativas, estructuras, 27-29
distribución continua, funciones de, 64, 67
distribución estadística ρ, función de, 48-49, 56, 85, 89-90, 93, 103, 104, 124-125
divergencias de Poincaré, 76, 79, 80, 89, 101, 125
dualismo: cartesiano, 110, 111; de la ciencia clásica, 109

ecuaciones, *véase* Hamilton, ecuaciones de; Liouville-von Neumann, ecuación de; movimiento, ecuación del; Newton, ecuaciones de; Schrödinger, ecuación de
Ehrenfest, P. y T., 56
Einstein, Albert, 17, 18, 24, 34, 89, 102, 110, 113
electromagnetismo, 18
energía, 117, 127; cinética, 72; hamiltoniana, 72; potencial, 72
entropía, 19, 23, 37, 107, 108
entropía de Kolmogorov-Sinai, 142
equilibrio termodinámico, 83
ergódicos, sistemas, 141
espacio de Hilbert, 118-119, 121-122, 128, 129-131, 135, 142, 143
espacio test, 131, 136, 139, 140
espacios generalizados (*rigged Hilbert spaces*), 124-125, 128-132, 134, 138
espectral, representación, 125, 134, 136, 143
espectral compleja, teoría, 61, 66, 128, 135, 141-142
estadística, descripción, 85, 89, 91, 103
estructuras, *véase* disipativas o de no equilibrio; Turing, estructuras de
Everett, Hugh, 80
existencia, teoremas de, 125

ferromagnetos, 95
Feynman, Richard, 24; *El carácter de la ley física*, 7, 37, 79
física actual, 26
física clásica, 17, 18, 23, 26, 43, 100, 110
flecha del tiempo, 8, 16, 19, 23, 24, 28, 44, 64, 67, 91, 102-103, 108, 110, 111
flecha termodinámica, 37-38
fluidos, turbulencia en los, 13-14
fotones, emisión de, 91; tiempo de emisión, 17
frecuencias ω, 73
función δ, 48, 132-133
función test, 56, 62, 66, 129, 131, 134, 137
funciones de onda Ψ, 51-52, 71, 80, 82-83, 85, 89-90, 95, 102, 104, 125, 127, 142; colapso de las, 83, 84, 103, 104
funciones Schwartz, 131

Galileo Galilei, 7
Gamow, George, vectores de, 142
Gelfand, 53; triplete de, 129
geometría, 110
geométrica de la física, descripción, 110
Gibbs, 89
grano grueso, 36, 56, 67
gravitación, 18; *véase también* campo gravitatorio

Hamilton, ecuaciones de, 95, 117, 125, 126, 132
hamiltoniano, *véase* operador hamiltoniano *H*
Hawking, Stephen, 24; *Historia del tiempo*, 7, 18, 37
Heisenberg, Werner, 38; *véase también* incertidumbre
hidrodinámica, ciencia, 28
Hilbert, *véase* espacio de
Hobbes, Thomas, 109

incertidumbre de Heisenberg, relaciones de, 95
inestabilidad, 60, 65, 67, 84, 95, 107, 111; *véase también* caos, caótico, sistemas
inestabilidad de Bénard, 28
integrabilidad, 76
interacciones, 72-73, 74, 92
irreducibilidad, 71, 137, 138, 140, 142-143
irreversibilidad, 14, 19, 23-24, 28-29, 33-34, 36-37, 53, 56, 65, 67, 76, 83, 95, 102, 107-108, 129, 143

KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser), teoría, 74
Kant, Immanuel, 25
ket, vector, 122
Kolmogorov, *véase* KAM, teoría
Kondepudi, D.: «Chiral symmetry breaking in sodium chlorate crystallization», 31
Koopman, B., 119

Lagrange, Joseph L., 75
Laplace, Pierre Simon, 75, 110
Leibniz, Gottfried W., 25
Liapunov: coeficiente de, 46; exponentes positivos de, 74, 132; tiempo de, 53, 55, 60, 65, 66, 103, 104, 135, 139, 142
Lighthill, sir James, 43, 44, 74
Liouville-von Neumann, ecuación de, 90, 92, 93, 94, 101, 118, 124; operador *L* de, 120, 123, 124, 125, 128, 142
LPS *(large Poincaré's systems)*, *véase* Poincaré, grandes sistemas de
Lucrecio, 17
luz, emisión espontánea de, 17

macroscópica, escala, 13, 64, 100-101, 108
magnetismo, 94-95
«mapas», 9, 71, 85
matemáticas, 50
mecánica clásica, 14, 65, 75-76, 83, 102, 119
mecánica cuántica, 14-15, 34, 39, 50, 52, 61, 65, 79, 80-81, 82, 84-85, 95, 99, 100-101, 102, 104, 119, 126-128, 143
mecánica estadística, 75, 89, 90, 118
mecánica newtoniana, 44
medición, problema de la, 99-100
mezcladores, sistemas, 141-142
microscópica, escala, 13, 64, 67, 94, 108

Moser, *véase* KAM, teoría
movimiento: ecuación del, 45, 72, 132, 137; laminar, 45; turbulento, 45
movimiento, leyes newtonianas del, 44
muerte térmica, 19

naturaleza, leyes de la, 7, 8, 13, 14, 17, 50, 67, 95, 108, 141-142
Neumann, John von, 53, 80; *véase también* Liouville-von Neumann, ecuación de
Newton, Isaac: ecuaciones de, 95; leyes del movimiento
no equilibrio, estructuras de, 27-28, 33-34, 36, 38, 108

operador: de evolución *U*, 90, 93, 94, 102, 121, 124, 131, 138; en el espacio de Hilbert, 119, 123; *H* hamiltoniano, 51-52, 53, 80, 82, 84, 117, 126, 128, 142; hermítico, 119-120, 124, 126, 129-131; isométrico, 120, 134-135; *véase también* Liouville-von Neumann, operador *L* de; Perron-Frobenius, operador *U* de
óptica de los rayos láser, 28
osciladores químicos, 29, 37

partículas elementales, 15, 95
Pasteur, Louis, 32
Penrose, Roger: *La nueva mente del emperador*, 110
Perron-Frobenius, operador *U* de, 47 f., 49-50, 52, 55, 59-68, 81, 125, 133, 135-136, 138, 140
perturbación, 73, 74, 84
Petrosky, T., 143
Planck, constante de, 51
Platón, 17
Poincaré, Henri, 23, 72, 73-74; grandes sistemas de (LPS), 75-76, 84, 90-91, 92, 94, 142, 143; *Ciencia y método*, 25; *véase también* divergencias de Poincaré
Poisson, paréntesis de, 90
polinomios de Bernoulli, 60-61 y f., 62, 104, 136-137, 139-140
Popper, sir Karl, 16, 26
potencialidades, 82, 83, 102, 127
Prigogine, Ilya: *La nueva alianza* (con I. Stengers), 112; *Time, Chaos and the Quantum*, 9
probabilidad, 29-30, 34-36, 52, 53, 65, 67, 71, 84-85, 95, 102, 107, 108, 141; *véase también* amplitud de probabilidad
probabilista, descripción, 83, 85, 103, 104, 109, 118, 127, 137

radiación residual de 3 K, 83-84
relatividad, 39, 50
resonancias, 73, 74, 75, 80, 84, 91, 92, 101, 104
Rosenfeld, Leon, 100
ruptura de simetría, *véase* simetría temporal, ruptura de
rupturas espontáneas de la simetría, 94

Schrödinger, Erwing, ecuación de, 51, 71, 80, 81-83, 90, 94, 101, 102, 103, 104, 126
Schuster, H., 48
sensibilidad a las condiciones iniciales, 46
«ser» y «devenir», distinción entre, 17

Shakespeare, William, 15
simetría temporal, ruptura de, 29, 30-31, 32, 50, 53, 66, 67, 83, 90, 94, 108, 132, 141
Snow, 14
Stengers, Isabelle, *La nueva alianza* (con I. Prigogine), 112

Tarnas, Richard, 113
termodinámica, 18, 19, 23, 101, 107; segundo principio de la, 27, 43, 67, 107, 111
tiempo, 16, 26; circular, 25; eliminación del, 17-18; paradoja del, 16-17, 19, 23, 25, 36, 38, 67, 76, 110; reversibilidad del, 108; *véase también* irreversibilidad; Liapunov, tiempo de
transformación del panadero, 54-55 y f., 65, 66, 71, 75, 91, 94, 129, 132, 137
trayectorias, 46, 48, 49, 50, 51 y f., 60, 63, 67, 71, 85, 95, 102, 103, 104, 117-118, 125, 132-133, 137, 140
triplete de Gelfand, 129
Turing, estructuras de, 33 y f., 37

UNESCO, 112
Unión Internacional de Mecánica Pura y Aplicada, 43
universo: estructura del, 107-109, 110-111; evolución del, 18-19

vacío cuántico, 111
vectores, *véase bra*, factor; Gamow; *ket*
viscosidad, 37

Wigner, Eugene, 80

Índice

Prólogo 7
Capítulo 1 13
Capítulo 2 23
Capítulo 3 43
Capítulo 4 59
Capítulo 5 71
Capítulo 6 79
Capítulo 7 89
Capítulo 8 99
Capítulo 9 107
Apéndice: Teoría espectral y caos 117
Notas 145
Índice alfabético 151

Ugo Pagotto

Las leyes del caos

Drakontos

Directores:
JOSEP FONTANA y GONZALO PONTÓN

Últimos títulos publicados:

John D. Barrow
LA TRAMA OCULTA DEL UNIVERSO
Contar, pensar y existir

Michio Kaku
HIPERESPACIO
Una odisea científica a través de universos paralelos, distorsiones del tiempo y la décima dimensión

Leon Lederman con Dick Teresi
LA PARTÍCULA DIVINA
Si el universo es la respuesta, ¿cuál es la pregunta?

Roger Penrose
LAS SOMBRAS DE LA MENTE
Hacia una comprensión científica de la consciencia

Antonio R. Damasio
EL ERROR DE DESCARTES
La emoción, la razón y el cerebro humano

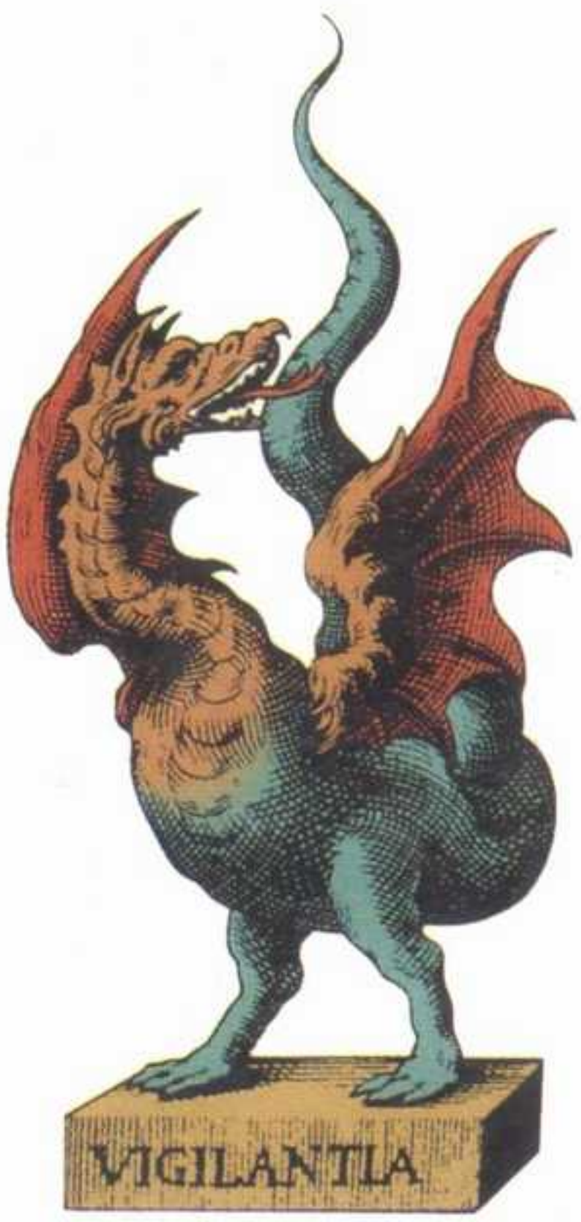
Paul Davies
SOBRE EL TIEMPO
La revolución inacabada de Einstein

Ilya Prigogine
LAS LEYES DEL CAOS

Robert Osserman
LA POESÍA DEL UNIVERSO
Una exploración matemática del cosmos

Stephen Jay Gould
LA FALSA MEDIDA DEL HOMBRE
Edición revisada y ampliada

«Un título como *Las leyes del caos* —nos dice Ilya Prigogine, Premio Nobel de Química y una de las grandes figuras de la ciencia de nuestro tiempo— puede parecer paradójico. ¿Acaso no es el caos, por definición, "imprevisible"? Veremos que no es así, sino que la noción de caos nos obliga a reconsiderar la noción de "leyes de la naturaleza". En la perspectiva clásica, una ley de la naturaleza estaba asociada a una descripción determinista y reversible en el tiempo. Futuro y pasado desempeñaban en ella el mismo papel. La introducción del caos nos obliga a generalizar la noción de ley de la naturaleza y a introducir en ella los conceptos de probabilidad e irreversibilidad.»



Prigogine nos conduce, a lo largo de un texto claro y accesible (las explicaciones matemáticas se dejan para un apéndice sobre «Teoría espectral y caos», que pueden consultar los lectores con más conocimientos de física), por el fascinante panorama de una nueva visión de la naturaleza, que ha reemplazado a la vieja en que el universo era como un gran autómata sometido a leyes deterministas y reversibles (una concepción aún válida para algunos casos simples), y que nos muestra que la inmensa mayoría de los objetos están sometidos a la inestabilidad, al caos, lo que transforma las leyes que les afectan en probabilistas y nos obliga a tomar en cuenta la flecha del tiempo. Este innovador planteamiento de Prigogine que asocia complejidad, inestabilidad e irreversibilidad nos puede permitir abarcar en una sola descripción unificada del universo lo microscópico y lo macroscópico, incluir en ella los sistemas más complejos, la vida y el propio ser humano, y explicar la creatividad de la naturaleza.

ISBN 84-7423-726-2